

# Table des matières

- I Rayon de convergence** 1
- I.1 Série entière . . . . . 1
- I.2 Convergence d'une série entière . . . . . 1
- I.3 Calcul du rayon de convergence . . . . . 1
- I.4 d'Alembert . . . . . 2
  
- II Propriétés de la somme, cas réel** 2
- II.1 Intégration . . . . . 2
- II.2 Dérivation . . . . . 2
  
- III Développement en série entière** 3
- III.1 Taylor . . . . . 3
- III.2 Fonctions développables . . . . . 3
- III.3 Développements en pratique . . . . . 3

## I Rayon de convergence

### I.1 Série entière

#### Définition 1

- Une série entière de variable  $z \in \mathbb{K}$  est une série de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  où  $a_n \in \mathbb{C}$ .
- Les termes de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelés les coefficients de la série entière.
- Pour chaque  $z \in \mathbb{K}$  on étudie la convergence de la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .  
L'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.
- La somme de cette série entière est la **fonction**  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  définie sur le domaine de convergence.

#### Définition 2

On considère deux séries entières  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ .

1. La série somme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ .
2. Le produit de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  par le scalaire  $\lambda \in \mathbb{C}$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ .

3. La série produit est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

### I.2 Convergence d'une série entière

#### Définition 3

Soit  $R \in \mathbb{R}^+$ . On appelle disque ouvert de centre  $O$  et de rayon  $R$  l'ensemble  $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ .

#### Théorème 1 (Lemme d'Abel)

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $(|a_n| r^n)$  est une suite bornée. Alors pour tout  $z \in D_r$  (ie  $|z| < r$ )

$$|a_n z^n| = O_{+\infty} \left( \left( \frac{|z|}{r} \right)^n \right) \text{ et donc } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge.}$$

#### Définition-Proposition 1

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière.

1. L'ensemble  $I = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui commence à 0.
2.  $R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est appelé **rayon de convergence** de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$

#### Théorème 2

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

1. Si  $|z| < R$  alors la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge.
2. Si  $|z| > R$  alors la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  diverge grossièrement.
3. Si  $|z| = R$  on ne peut pas conclure.

### I.3 Calcul du rayon de convergence

#### Proposition 1

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série de convergence de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$

1. Si  $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$  alors  $R_a \geq R_b$  (un cas particulier :  $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$ ).
2. Si  $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .

### Théorème 3

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  une série de convergence de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$ .

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n z^n$  est de rayon de convergence  $R_a$ . Le cas  $\lambda = 0$  donne un rayon infini.
2. Le rayon de convergence  $R$  de la série somme vérifie  $R = \min(R_a, R_b)$  si  $R_a \neq R_b$  et  $R \geq R_a$  dans le cas  $R_a = R_b$ .
3. Le rayon de convergence  $R$  de la série produit vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

### Proposition 2

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

## I.4 d'Alembert

### Théorème 4 (Règle de d'Alembert)

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge (on a même  $\forall a \in ]\ell, 1[ u_n = o_{+\infty}(a^n)$ ).
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement ( $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ).
3. Si  $\ell = 1$  la série peut être divergente ou convergente.

## II Propriétés de la somme, cas réel

### II.1 Intégration

#### Théorème 5

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors  $f$  est continue sur  $] -R, R[$ .

#### Théorème 6

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

$$\forall x \in ] -R, R[ \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence  $R$  exactement d'après 2

#### Corollaire 1

Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on peut calculer, pour  $a, b \in ] -R, R[$  l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  en intégrant la somme terme à terme.

## II.2 Dérivation

#### Théorème 7

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

$f$  est dérivable sur  $] -R, R[$  et pour  $x \in ] -R, R[$  on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

. Remarquons que la série entière qui définit  $f'$  est également de rayon de convergence  $R$ .

#### Théorème 8

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$  et les dérivées de  $f$  sont obtenues par dérivation terme à terme de la série entière, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in ] -R, R[ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

#### Corollaire 2

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $f$  sa somme. Alors  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Corollaire 3

Les coefficients d'une série entière de rayon non nul sont uniques.

Plus précisément, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$  sont de rayons non nuls et ont les mêmes sommes pour tout  $x$  dans un intervalle de la forme  $] -\alpha, \alpha[$  ( $\alpha > 0$ ) alors  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = b_n$ .

### III Développement en série entière

#### III.1 Taylor

##### Théorème 9 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ , (où  $I$  est un intervalle non vide et non réduit à un point)  $a, x \in I$ . Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

##### Théorème 10 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$  (où  $I$  est un intervalle non vide et non réduit à un point) et  $a, x \in I$ .

On pose  $M$  la valeur maximale de  $|f^{(n+1)}(t)|$  pour  $t$  entre  $a$  et  $x$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

#### III.2 Fonctions développables

##### Définition 4

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  tel que  $0 \in I$  et  $0$  n'est pas une borne de  $I$ . Le **développement de Taylor** de  $f$  est la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

##### Définition 5

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  est intervalle qui contient  $0$  (et  $0$  n'est pas une borne de  $I$ ). On dit que  $f$  est **développable en série entière** ssi il existe  $r > 0$  et une série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$

tels que :

- $] -r, r[ \subset I$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est de rayon  $R \geq r$
- $\forall x \in ] -r, r[ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Autrement dit,  $f$  est la somme d'une série entière sur une intervalle  $] -r, r[ \neq \emptyset$  contenu dans  $I$ .

La série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est appelée **développement en série entière** de  $f$ .

### III.3 Développements en pratique

##### Proposition 3

sin et cos sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

##### Proposition 4

sh et ch sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

##### Proposition 5

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le rayon de convergence est  $+\infty$  et le développement est en fait une somme finie.

## Formulaire

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ]-1, 1[$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$	$x \in ]-1, 1[$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$x \in ]-1, 1[$