

Devoir maison n°4

A rendre le 19/11

Exercice 1

Pour $n \geq 2$ entier, on pose

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on a

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t} dt$$

3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n R^n$ diverge.
4. Soit $x \in]-R, R[$. On pose

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$

- (a) Calculer $(1-x)S'(x)$ pour tout réel $x \in]-R, R[$.
 - (b) En déduire une expression explicite de $S(x)$ lorsque $x \in]-R, R[$.
5. Question bonus
- (a) En utilisant les résultats prouvés dans le DS 2, montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n (-R)^n$ converge.
 - (b) Déterminer la limite de S en $-R$ et intuitionner la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Ceci reste une intuition car notre cours sur la continuité et dérivabilité des sommes de séries entières n'est valable que sur $] -R, R[$ et nous n'avons aucun résultat en $-R$ pour lier la somme de notre dernière série et la fonction S .