Lois usuelles

Exercice 1
Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre huit.

1. Déterminer la probabilité des événements :
   (a) Huit voitures ont été vendues en une semaine.
   (b) Au moins deux voitures ont été vendues en une semaine.
2. Plus de huit voitures ont été vendues en une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu douze ventes ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu au moins six et au plus dix voitures vendues en une semaine ?
4. Quelle est la probabilité qu'on vende moins de seize voitures en une semaine, sachant qu'on en vendra plus de huit ?

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer $\mathbb{P}(X$ est pair).

Exercice 3
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre λ et μ. Calculer la loi de X sachant $X + Y = n$ (n fixé).

Applications directes

Exercice 4
Soit $a \in \mathbb{R}$; soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que
$\forall (k,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = j)) = \dfrac{a}{2^{k+1} j!}$.

1. Déterminer a.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5
Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 6
On lance deux dés à 6 faces simultanément.
Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le minimum des deux chiffres obtenus. On pourra calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.

Exercice 7
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on le remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche ».
On pose également : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 8
On effectue des tirages dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire :

- si on tire une boule noire, on arrête ;
- si on tire une boule blanche, on la remet et on ajoute une autre boule blanche.

Soit X le rang d'obtention de la boule noire.

Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$.

Exercice 9
Un garçon mange un biscuit ou un yaourt au petit déjeuner.
Le jour 1, il mange un biscuit.
Le jour i, il mange un biscuit avec une probabilité $\dfrac{1}{i}$ si tous les jours d'avant il a mangé des biscuits.
On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier jour où il mange un yaourt (donc pas de biscuit), et A_i l'événement "il mange un biscuit le jour i".

1. Donner les valeurs prises par X.
2. Exprimer $(X = n + 1)$ en fonction des A_i.
3. Calculer $P(X = n + 1)$.

Fonctions de répartition

Exercice 10
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On tire simultanément 2 boules, et on note X la variable aléatoire représentant le plus petit des deux nombres obtenus.

Déterminer la fonction de répartition F de X, puis la loi de X. Il s'agit de la fonction $F : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right.$.

Exercice 11
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}$. On pose $Z = \min(X,Y)$.
Etudier la loi de Z.

Exercice 12
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P), mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)).$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$.
   En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Plus délicat

Exercice 13
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n \mathbb{P}(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $\mathbb{P}(X=n)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
   (c) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et calculer $G_X(t)$ pour $t \in D_{G_X}$.
   (d) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Exercice 14 (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$)

1. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire.
   Montrer que N est d'espérance finie $\Leftrightarrow$ la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$ converge,
   et que, dans ce cas, $E(N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$.
2. **Application** *Nombre moyen de tirages pour obtenir un motif*
   Une chaîne de caractères ne comportant que les caractères **A, B** ou **C** est générée aléatoirement avec équiprobabilité pour les trois caractères.
   On se propose d'estimer le nombre de tirages moyen pour qu'apparaisse le motif "**ACBAC**".
   Notons T la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnant le nombre de tirages pour qu'apparaisse pour la première fois le motif "**ACBAC**".
   (a) Montrer que, presque sûrement, $T < +\infty$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $f(n)$ le nombre de chaînes de caractères ne comportant que les caractères **A, B** ou **C**, de longueur n et ne comportant pas le motif "**ACBAC**" et $g(n)$ le nombre de chaînes de caractères ne comportant que les caractères **A, B** ou **C**, de longueur n et **finissant par le motif** "**ACBAC**" pour la première fois (bien sûr $g(0) = g(1) = \cdots = g(4) = 0$, $g(5) = 1$, par convention $f(0) = 1$ – une seule chaîne vide).
   En rajoutant le motif à la fin des $f(n)$ chaînes de longueur n sans motif, montrer que $f(n) = g(n+2) + g(n+5)$.
   (c) En écrivant que $\frac{f(n)}{3^n} = 3^2 \frac{g(n+2)}{3^{n+2}} + 3^5 \frac{g(n+5)}{3^{n+5}}$, calculer $E(T)$, nombre de tirages moyen pour qu'apparaisse le motif "**ACBAC**".
   Le lecteur pourra s'amuser à changer le motif et calculer la nouvelle espérance correspondante...
   (d) Écrire un (petit) programme Python qui effectue des tirages aléatoires et estime (grossièrement et empiriquement) le tirage moyen.