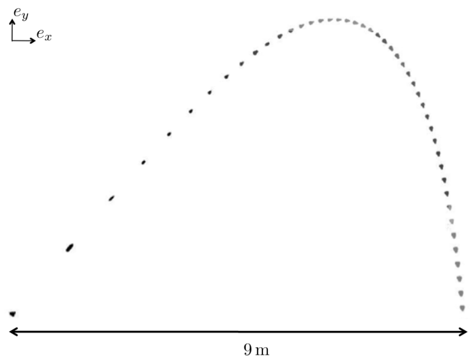
TD 9

Modélisation de la trajectoire d'un volant de badminton

L'objectif de ce TD mi-informatique mi-physique est d'analyser la force de frottement subie par un volant de badminton à partir de l'étude de sa trajectoire. Nous établirons l'équation du mouvement du volant pour deux modèles de frottements, linéaire et quadratique, et la résoudrons numériquement par la méthode d'Euler. Les résultats obtenus seront ensuite comparés à la chronophotographie du vol d'un volant.

Données : masse du volant étudié $m = 5{,}3\,\mathrm{g}$; accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

I - Trajectoire expérimentale



Notre étude se base sur un enregistrement vidéo de la trajectoire du volant, extrait d'une thèse[1], où des images du volant sont prises à intervalle régulier $T_\mathrm{e} = 45\,\mathrm{ms}$ avec une caméra rapide. Toutes ces images ont été superposées pour donner la chronophotographie ci-contre.

Les positions successives du volant ont été repérées à l'aide du logiciel ImageJ, puis exportées au format texte dans le fichier `pointage.txt` à récupérer sur l'ENT. Enregistrer ce fichier *dans le même dossier* que votre programme Python.

Importer la bibliothèque `numpy` sous l'alias `np`, et recopier les lignes suivantes dans votre fichier Python :

```
1 pointage = np.loadtxt("pointage.txt",skiprows=1)
2 Xexp = pointage[:,5]
3 Yexp = pointage[:,6]

5 x = Xexp - Xexp[0]
6 y = -(Yexp - Yexp[0])
```

Ouvrir le fichier `pointage.txt`, par exemple avec le bloc-notes, et afficher dans la console les deux listes `Xexp` et `Yexp`. En déduire ce que font les trois premières lignes proposées ci-dessus. Les lignes 5 et 6 permettent de corriger deux « défauts » de l'export réalisé par ImageJ : l'origine du repère est replacé à la position initiale du volant (au lieu d'un coin d'image), et l'axe des ordonnées réorienté vers le haut (alors qu'ImageJ l'oriente vers le bas).

Importer le module `pyplot` de la bibliothèque `matplotlib` sous l'alias `plt` (`import matplotlib.pyplot as plt`), et afficher la trajectoire expérimentale, c'est-à-dire `y` en fonction de `x`. On pourra utiliser l'option d'affichage `marker='o'` pour représenter des points.

II - Modélisation

II.1 - Équation du mouvement

Rappelons que l'objectif du TP est de comparer les trajectoires prévues par deux modèles de frottement à la trajectoire expérimentale pour déterminer lequel est le plus proche de la réalité. Ces deux modèles sont ceux d'une force de frottement linéaire, c'est-à-dire de norme proportionnelle à la vitesse du volant, ou quadratique, c'est-à-dire de norme proportionnelle au carré de sa vitesse :

$$\vec{F}_\mathrm{lin} = -a\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \vec{F}_\mathrm{quadr} = -bv\,\vec{v}$$

où on note $v = ||\vec{v}||$. Les deux coefficients de frottement a et b sont phénoménologiques : ils ne sont pas connus a priori, et dépendent entre autres de la forme du volant et de la façon dont il se déforme au cours de son mouvement.

Établir l'équation du mouvement du volant pour ces deux modèles de force.

1. Thèse de Baptiste Darbois-Texier, réalisée au laboratoire PMMH de l'ESPCI.

II.2 - Estimation des coefficients de frottement

Sur chacune des deux équations, montrer qu'après une phase transitoire la vitesse du volant tend vers une vitesse limite $\overrightarrow{V}_{\text{lim}}$ verticale. En déduire que la mesure de cette vitesse limite permet de déterminer a et b.

À partir des deux listes de coordonnées `x` et `y`, estimer numériquement les valeurs de a et b. Les conserver sous forme de deux variables globales `a` et `b`, au même titre que g, m ou encore T_e. À partir de l'observation de la chronophotographie, indiquer ce qui limite la précision de l'estimation.

II.3 - Estimation de la vitesse initiale

Pour pouvoir résoudre les équations du mouvement par la méthode d'Euler, il est nécessaire de connaître les composantes de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ du volant. En adoptant la même démarche que précédemment, déterminer numériquement `V0x` et `V0y`

II.4 - Résolution de l'équation du mouvement par la méthode d'Euler

Implémenter deux fonctions `acc_lin` et `acc_quadr` prenant comme arguments les deux composantes `Vx` et `Vy` du vecteur vitesse du volant et renvoyant les deux composantes `Ax` et `Ay` de son vecteur accélération, respectivement pour le modèle linéaire et quadratique.

Coder une fonction `euler` capable de résoudre l'équation du mouvement, c'est-à-dire de renvoyer trois listes de même longueur `t` (temps), `Vx` et `Vy` (composantes de la vitesse au cours du temps). Cette fonction prend comme seul argument une fonction `acceleration`, qui prend elle-même les mêmes arguments que `acc_lin` et `acc_quadr`. On rappelle que toutes les autres variables, notamment les conditions initiales, sont définies comme des variables globales puisqu'il s'agit d'analyser la chronophotographie. Choisir un pas de temps $\Delta t = T_\text{e}/50$.

En s'inspirant de la méthode d'Euler, écrire une fonction `position` prenant pour arguments deux listes `Vx` et `Vy` contenant les composantes du vecteur vitesse et renvoyant deux listes `X` et `Y` contenant les composantes du vecteur position du volant. On rappelle qu'à l'instant initial le volant se trouve au point de coordonnées $(0, 0)$.

III - Comparaison entre modèle et expérience

En combinant les différentes fonctions, calculer puis représenter les trajectoires prévues par le modèle linéaire et par le modèle quadratique. Conclure sur le meilleur modèle.

L'auteur de la thèse indique une vitesse initiale $V_0 = 40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ formant un angle $\theta_0 = 52°$ avec l'horizontale, et une vitesse limite $V_{\text{lim}} = 6{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Remplacer vos valeurs estimées par celles de l'auteur (**Attention !** commentez vos expressions, mais ne les effacez pas, pour pouvoir revenir en arrière.). Commenter l'influence de ce changement.