

## Table des matières

<b>I Equations scalaires</b>	<b>1</b>
I.1 Equations d'ordre 1 . . . . .	1
I.2 Equation d'ordre 2 . . . . .	2
I.3 Ordre 2, coefficients non constants . . . . .	3
<b>II Systèmes différentiels linéaires</b>	<b>5</b>
II.1 Cauchy-Lipschitz . . . . .	5
II.2 Cas $A$ diagonalisable . . . . .	5
II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant . . . . .	6

## I Equations scalaires

Rappel : il s'agit de trouver toutes les FONCTIONS qui vérifient une certaine relation sur un intervalle donné

### I.1 Equations d'ordre 1

#### I.1.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec  $a, b$  des fonctions définies sur un intervalle  $I$ . L'équation homogène associée à  $E$  est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de  $E$  toute **fonction** dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ . Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de  $E$  vérifiant en plus une condition du type  $y(t_0) = y_0$  ( $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ ) est appelé un problème de Cauchy . On parle de condition initiale.

#### I.1.2 Notation

On omet parfois de préciser l'intervalle dans l'écriture de l'équation, voire la variable. Dans ce cas l'intervalle est précisé une fois pour toute.

Par exemple, résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y' - 2y = 0$ .

#### I.1.3 Théorème (Résolution de l'équation homogène)

Soit  $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $A$  une **primitive** de  $a$  sur  $I$ . Pour une fonction  $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $E_H \ \forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0$
2.  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ \forall t \in I \ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ .

Ainsi, à chaque scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  correspond exactement une fonction solution  $y$  et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$  pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition  $y(t_0) = y_0$ , alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

#### I.1.4 Théorème (Cauchy)

Soient  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Etant donné  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ , il existe une unique solution (sur  $I$ )  $y$  de l'équation différentielle  $E$  qui vérifie  $y(t_0) = y_0$ .

#### I.1.5 Proposition

L'ensemble des solutions de  $E$  sur  $I$  est un espace affine de dimension 1, c'est à dire que toute solution  $y$  est de la forme  $y_p + y_H$  où  $y_p$  est l'une des solutions de  $E$  (appelée solution particulière) et  $y_H$  est une solution quelconque de  $E_H$ .

#### I.1.6 Sur les courbes intégrales

Soient  $y_1$  et  $y_2$  des solutions de  $E$ . Pour  $t_0 \in I$  quelconque, si  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  alors  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équation différentielle linéaire sont soit égales, soit leur courbes représentatives ne se coupent pas.

#### I.1.7 Méthode

Pour résoudre une équation du type  $y' + ay = b$  :

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée :  $y' + ay = 0$ , ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évident, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

### I.1.8 Exemple

Résolvons l'équation (E) :  $ty' + y = t^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a ici un problème, car le coefficient de  $y$  s'annule.

- On se place sur  $I = \mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$ . L'équation devient  $y' + \frac{1}{t}y = t$  et l'équation homogène a pour solution toutes les fonctions de la forme  $y : t \mapsto \frac{\lambda}{t}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est quelconque.
- On applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme  $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t} = \lambda(t)f(t)$  où  $\lambda \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  et  $f : t \mapsto \frac{1}{t}$  est une solution de l'équation homogène.

Alors, pour tout  $t \in I$ ,  $\lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t) + \frac{1}{t}f(t) = t \iff \lambda'(t)f(t) = t \iff \lambda'(t) = t^2$ .

On prend  $\lambda : t \mapsto \frac{t^3}{3}$  et  $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$  est une solution particulière de E sur  $I$

- Raccordement. Si  $y$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ , alors elle vérifie (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .

Ainsi  $y : t \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_1}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda_2}{t} + \frac{t^2}{3} & \text{si } t > 0 \end{cases}$  où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

La seule possibilité pour pouvoir prolonger  $y$  par continuité en 0 et alors de prendre  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Ainsi, la seule solution possible de (E) sur  $\mathbb{R}$  est  $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$ .

- Réciproquement (attention, ne pas oublier la synthèse!),  $t \mapsto \frac{t^2}{3}$  est bien solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  (par un calcul facile).

## I.2 Equation d'ordre 2

### I.2.1 Rappels sur les équations à coefficients constants

On considère l'équation  $(E_H)$  sur  $\mathbb{R} : ay'' + by' + cy = 0$  où  $a, b, c \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq 0$ . L'équation caractéristique associée est  $ar^2 + br + c = 0$  d'inconnue  $r \in \mathbb{C}$ .

### I.2.2 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)

On considère  $a, b, c \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$  et on cherche les solutions de  $(E_H)$  à valeurs complexes.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines  $r_1$  et  $r_2$  distinctes dans  $\mathbb{C}$ , alors  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de  $(E_H)$  ssi il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double  $r$  alors  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de  $(E_H)$  ssi il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases}$$

Si de plus on se donne  $t_0 \in I$  et  $y_0, y'_0 \in \mathbb{C}$ , alors il existe une unique solution  $y$  de l'équation différentielle homogène qui vérifie  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y'_0$ .

### I.2.3 Théorème (Résolution de l'équation homogène, cas réels)

On considère  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$  et on cherche les solutions de  $(E_H)$  à valeurs réelles.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines  $r_1$  et  $r_2$  distinctes dans  $\mathbb{R}$ , alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double  $r$  alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée  $\alpha \pm i\beta$ , alors les solutions à valeurs réelles de  $(E_H)$  sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{\alpha t} (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel possède une unique solution.

**I.2.4 Théorème**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$  tels que  $a \neq 0$  et soit  $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ .

1. Soient  $t_0 \in I$  et  $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème de Cauchy (sur  $I$ )

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2. L'équation différentielle linéaire

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

admet au moins une solution  $y_p$  sur  $I$ , et l'ensemble de ses solutions est  $y_p + \mathcal{S}_0$  où  $\mathcal{S}_0$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

**I.2.5 Proposition (Principe de superposition)**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$  et  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . On suppose que  $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  vérifient  $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$  et  $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$ . Alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$  est solution de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ .

**I.2.6 Méthode**

Le second membre est de la forme  $Ae^{\alpha t}$  avec  $A, \alpha \in \mathbb{C}$  des constantes. On cherche  $y_p$  sous la forme  $P(t)e^{\alpha t}$  où  $P$  est :

1.  $K$  une constante si  $\alpha$  n'est pas solution de l'équation caractéristique.
2.  $t \mapsto Kt$  si  $\alpha$  est une racine de l'équation caractéristique (ie  $e^{\alpha t}$  est l'une des solutions de l'équation homogène)
3.  $t \mapsto Kt^2$  si  $\alpha$  est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante  $K$

**I.2.7 Exemple**

Résoudre  $y'' + y = \cos(x)$ .

**I.3 Ordre 2, coefficients non constants****I.3.1 Théorème (Cauchy-Lipschitz)**

Soient  $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Soient également  $t_0 \in I$ ,  $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ . Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{possède une unique solution } \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \text{ définie sur } I.$$

**Preuve.**

Admis! ■

**I.3.2 Théorème**

Soient  $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . L'ensemble des solutions sur  $I$  de l'équation  $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$  est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de  $(E_H) y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$  sont de la forme  $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$  (pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ) où  $y_1, y_2$  sont solutions de  $(E_H)$  et non proportionnelles et toute solution de (E) est de la forme  $y_p + y_H$  où  $y_p$  est une solution particulière de (E) et  $y_H$  une solution quelconque de  $(E_H)$ .

**Preuve.**

Le théorème précédent nous assure l'existence de  $y_p$  qui est une solution particulière de (E) (il suffit de choisir une condition particulière).

Notons  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $(E_H)$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de (E).

Posons  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K}^I \\ y & \mapsto & y'' + ay' + by \end{cases}$  qui est facilement linéaire. Alors  $\mathcal{S}_0 = \ker(\varphi)$ .

Alors pour  $t_0 \in I$ ,  $\begin{cases} \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$  est linéaire ( $\mathcal{S}_0$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, voir le

cours de sup) et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. ce qui conclut sur la dimension de  $\mathcal{S}_0$ .

Soit maintenant  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ . Alors  $y \in \mathcal{S} \iff \varphi(y) = \varphi(y_p) \iff \varphi(y - y_p) = 0 \iff y - y_p \in \mathcal{S}_0$  ce qui prouve bien que  $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$  (plan affine). ■

### I.3.3 Principe de superposition

Il reste bien évidemment valable, même quand les coefficients ne sont pas constants.

### I.3.4 Méthode de résolution

Il n'y a pas de méthode générale! On ne connaît que la forme des solutions, ainsi que la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. En général, l'exercice propose une méthode pour trouver au moins une solution de l'équation homogène.

### I.3.5 Recherche d'une solution DSE

Toujours en deux phases :

1. Analyse : on suppose qu'il existe une solution DSE de rayon  $R > 0$  et on trouve une relation sur les coefficients, que l'on résout.
2. Synthèse : on montre que la ou les fonctions trouvées sont solution. Soit en reconnaissant le DSE (fonction usuelle), soit en prouvant que le rayon de convergence trouvé est  $> 0$ . Il reste à vérifier (automatique normalement), que la fonction ainsi définie est bien solution, sur un intervalle que l'on précisera bien.

Résolvons sur des intervalles le plus grand possible  $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$  (E).

On cherche une solution  $y$  sous la forme  $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ , ie  $y$  est la somme d'une série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  pour  $r > 0$ .

Alors, pour  $t \in ] -r, r[$ ,  $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$  et  $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

$y$  est solution de (E) ssi

$$t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t) = 0$$

$$\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=2}^{+\infty} (-n(n-1) - n) a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n t^n - a_1 t - a_1 t^2 + a_0 + a_1 t = 0$$

$$\iff -\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0$$

$$\iff -\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0$$

$$\iff \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) t^n + a_2 t^2 - a_1 t^2 + a_0 = 0$$

Par unicité des coefficient d'un DSE de rayon non nul,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = a_2$  et  $\forall n \geq 3$   $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$  donc  $\forall n \geq 2$   $a_n = a_{n-1}$ .

Finalement,  $a_0 = 0$  et  $\forall n \geq 1$   $a_n = a_1$  donc  $y(t) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = a_1 t \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} = a_1 t \frac{1}{1-t}$ .

Synthèse : le rayon de convergence de la série trouvé étant égal à 1, l'unicité est valable et donc  $y : t \mapsto \frac{a_1 t}{1-t}$  est solution de (E) sur  $] -1, 1[$  pour toute valeur de  $a_1$ . C'est mieux que ce à quoi on pouvait s'attendre, vu que le coefficient de  $y''$  s'annule en 1 et 0.

Il nous manque une solution de cette équation homogène, non proportionnelle à  $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ .

### I.3.6 Trouver une deuxième solution

On reprend le cas général :  $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$  sur l'intervalle  $I$ .

Si on connaît une solution  $y_0$  de (E) sur  $I$  qui ne s'annule pas, alors on fait un changement de fonction inconnue,  $\lambda = \frac{y}{y_0}$  ie on cherche une autre solution  $y$  sous la forme  $y = \lambda y_0$  où  $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$  est notre inconnue.

En remplaçant dans l'équation, le terme en  $\lambda$  disparaît toujours.

### I.3.7 Exemple

ON reprend  $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$  (E) avec  $y_0 : t \mapsto \frac{t}{1-t}$ . On cherche  $y$  sous la forme  $y = \lambda y_0$  sur l'intervalle  $]0, 1[$  (pour l'instant).

Alors  $y$  est solution de (E) ssi  $t^2(1-t)(\lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'') - t(1+t)(\lambda' y_0 + \lambda y_0') + \lambda y_0 = 0$  ssi  $t^2(1-t)\lambda'' y_0 + \lambda'(2t^2(1-t)y_0' - t(1+t)y_0) = 0$

Or  $t^2(1-t)y_0 = t^3$  et  $2t^2(1-t)y_0'(t) - t(1+t)y_0(t) = 2t^2 \frac{1-t+t}{(1-t)^2} - \frac{t^2(1+t)}{1-t} = t^2 \frac{1-t}{1-t} = t^2$ .

Ainsi  $\lambda$  vérifie  $\lambda'' + \frac{1}{t}\lambda' = 0$  et donc  $\lambda'(t) = C_1 \frac{1}{t}$  et  $\lambda(t) = C_1 \ln|t| + C_2$  où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Finalement, les solutions de (E) sur  $]0, 1[$  sont de la forme  $y : t \mapsto C_1 \frac{t \ln(t)}{1-t} + C_2 \frac{t}{1-t} = \frac{t}{1-t}(C_1 \ln(t) + C_2)$ .

Le calcul de vérification montre que  $y : t \mapsto \frac{t}{1-t}(C_1 \ln|t| + C_2)$  est solution sur les intervalles  $] -\infty, 0[$ ,  $]0, 1[$ ,  $]1, +\infty[$ .

## II Systèmes différentiels linéaires

### II.1 Cauchy-Lipschitz

#### II.1.1 Définition

Soit  $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$  une fonction à valeurs vectorielles. On pose  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Soient égale-

ment  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$  et une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Le système d'équations différentielles  $Y' = AY + B$  est appelé un système différentiel linéaire à  $n$  équations et  $n$  inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est  $Y' = AY$ . Il est défini sur  $\mathbb{R}$  a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions  $y_1, \dots, y_n$  le vérifiant.
4. Soit  $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ . On appelle problème de Cauchy (en  $(t_0, Y_0)$ ) le système

$$\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

#### II.1.2 Exemple

Dans le cas  $n = 2$ , un tel système peut être  $\begin{cases} y_1' = 2y_2 + y_2 + e^t \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + \sin(t) \end{cases}$ .

#### II.1.3 Théorème

Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ ,  $I$  est un intervalle infini et  $t_0 \in I$ .

#### Preuve.

Admis

#### II.1.4 Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et (H) le système différentiel  $Y' = AY$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  de ses solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$  de dimension  $n$ .

Si  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ , l'ensemble des solutions de  $Y' = AY + B$  est un sous-espace affine de direction  $\mathcal{S}_H$ , c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

#### Preuve.

Comme pour l'ordre 2 scalaire, on construit une bijection linéaire entre  $\mathcal{S}_H$  et  $\mathbb{K}^n$  grâce au théorème II.1.3

### II.2 Cas $A$ diagonalisable

#### II.2.1 Résolution

$$\text{Résolvons } \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  peut s'écrire  $A = PDP^{-1}$  où  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a maintenant  $Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ . Si on pose  $X = P^{-1}Y$  (ie  $Y = PX$ ), alors le système différentiel devient  $Y' = DY$  (la multiplication par la matrice  $P^{-1}$  consiste en des sommes et des produits par des constantes donc  $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$  par linéarité de la dérivation).

En notant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  on obtient  $\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$  que l'on sait résoudre. Il existe  $a, b \in \mathbb{R}$

tels que  $x_1 : t \mapsto ae^{3t}$  et  $x_2 : t \mapsto be^t$ .

Or  $Y = PX = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $Y : t \mapsto a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} ae^{3t} - be^t \\ ae^{3t} + be^t \end{pmatrix}$ .

#### II.2.2 Remarque importante

Nous n'avons pas eu besoin du calcul de  $P^{-1}$ . La méthode précédente est à retenir, surtout le passage de  $Y$  à  $X$ .

#### II.2.3 Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable dans  $\mathbb{K}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres et  $V_1, \dots, V_n$  des vecteurs propres associés, qui forment une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Alors l'ensemble des solutions de  $Y' = AY$  est  $\text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, e^{\lambda_n t} V_n)$ .

#### Preuve.

C'est une généralisation facile de l'exemple précédent.

#### II.2.4 Matrice réelle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans ce cas, on obtient dans le théorème précédent, des expressions de la forme  $e^{\lambda t} V$  et  $e^{\bar{\lambda} t} \bar{V}$ . On admet que l'on peut les remplacer par  $\text{Re}(e^{\lambda t} V)$  et  $\text{Im}(e^{\lambda t} V)$ .

**II.2.5 Exemple**

Traiter le cas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

**II.2.6 Limite et parties réelles des valeurs propres**

Notez que l'exponentielle réelle qui apparaît est de la forme  $e^{\operatorname{Re}(\lambda)}$ . A quelle condition peut-on dire que toutes les solutions  $Y$  vérifient  $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ?

**II.2.7 Cas  $A$  trigonalisable**

On peut faire une résolution de proche en proche. Chaque ligne devient une équation scalaire d'ordre 1 à résoudre.

**II.2.8 Second membre**

Si le système est de la forme  $Y' = AY + B$  avec  $B$  continue, on reprend les notations de l'exemple. On trouve  $X' = DX + P^{-1}B$  et il faut calculer  $P^{-1}$  pour trouver  $X$  avant de calculer  $Y$ .

**II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant****II.3.1 Transformation du problème**

On souhaite résoudre  $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$  et l'équation devient

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} Y.$$

**II.3.2 Equation caractéristique**

D'après le cours sur les matrices compagnons, le polynôme caractéristique, dans le cas général, est directement lisible sur l'équation, comme pour l'ordre 2.

Plus précisément, si on veut résoudre  $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$ , le polynôme caractéristique de la matrice obtenu est  $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ . On retrouve bien le résultat connu quand  $n = 2$ .