Table des matières

I Matrices symétriques réelles

I.1 Lien avec le produit scalaire

Définition 1
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Théorème 1
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

I.2 Théorème spectral

Théorème 2
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.

II Coniques

II.1 Forme réduite

Définition 2
Une conique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

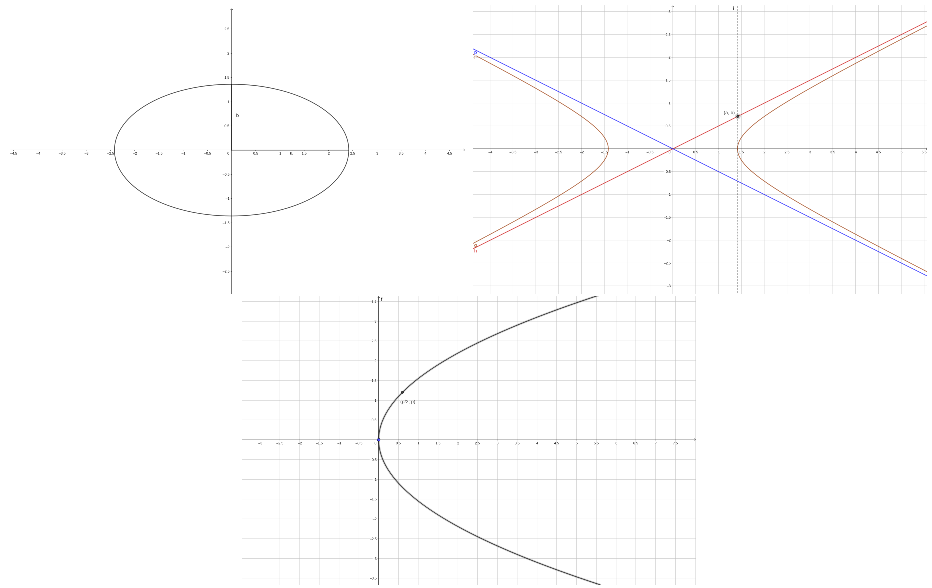
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Définition 3
Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

— $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
— $y^2 = 2px$ (parabole)

II.2 Tracés



II.3 Réduction d'une conique

III Taylor-Young à l'ordre 2

III.1 Matrice hessienne

Théorème 3 (Taylor-Young, ordre 2)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = & f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)) + \\ & \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0)\right) \\ & + o_0(h^2+k^2) \end{aligned}$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h, k) \to (0, 0)$.

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in U$. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

III.2 Etude des extrema

Théorème 4
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 \in U$ un point critique de f.

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0.

1. Si $\det(H) > 0$ alors f possède un extremum local en X_0.
   (a) si $\operatorname{tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum.
   (b) si $\operatorname{tr}(H) < 0$, il s'agit d'un maximum.
2. Si $\det(H) < 0$, alors f n'a ni minimum local ni maximum local en X_0 (point col).
3. Si $\det(H) = 0$, on ne peut pas conclure a priori, il faut faire l'étude autrement.