

**Exercice 1**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $f(M) = AM$ .

1. Déterminer une base de  $\ker(f)$ .
2.  $f$  est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
4. A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**Exercice 2**

Montrer que  $X^3 + pX + q$  avec  $(p, q) \neq (0, 0)$  ne peut pas avoir de racines triple.

Montrer que  $P$  possède une racine double ssi  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .

**Exercice 3**

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $\mathbb{C}^4$  tels que  $u \circ v = -v \circ u$  et  $u \circ u = v \circ v = Id$ .

1. Montrer que  $u$  et  $v$  sont de trace nulle et diagonalisables. Donner leurs valeurs propres et les dimensions des sous-espaces associés.
2. Montrer que si  $(e_1, e_2)$  est une base de  $E_1(u)$  alors  $(v(e_1), v(e_2))$  est une base de  $E_{-1}(u)$ .

**Exercice 4**

On note  $r$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$ , d'axe  $D$ , distincte de l'identité et  $s$  une symétrie orthogonale par rapport à un plan  $P$ .

Montrer que si  $P = D^\perp$  alors  $s \circ r = r \circ s$ .

Etudier la réciproque.

**Exercice 5**

Montrer que  $\varphi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  dont on donnera le noyau et l'image.

Pour aller plus loin : Trouver un antécédent de  $X^2$  et calculer  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

**Exercice 6**

Soit  $E$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ , telles que  $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt$  converge.

1. Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , montrer que  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .
2. Montrer que  $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt \end{cases}$  est définie et constitue un produit scalaire.
3. On définit sur  $[0, +\infty[$  les fonctions  $L_0(x) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* L_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ . Montrer que  $L_n$  est polynomiale de degré  $n$ .

4. Montrer que  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormale.

**Exercice 7**

Montrer que  $\varphi : P \mapsto P + (X-1)P'$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Trouver ses éléments propres et déterminer si  $\varphi$  est diagonalisable.

**Exercice 8**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $u$  un vecteur unitaire de  $E$ , on pose  $f_a : x \mapsto x + a\langle x, u \rangle u$ .

1. Montrer que  $f_a$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que  $A = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$  est stable pour la loi  $\circ$  et commutatif.
3. Calculer  $f_a^p$
4. Montrer que  $f_a$  est inversible ssi  $a \neq -1$ .
5. BONUS : donner l'interprétation géométrique du cas  $a = -1$ .

**Exercice 9**

Soient  $p, q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $p \circ q = 0$ .

1. Montrer que  $r = p + q - q \circ p$  est un projecteur.
2. Montrer que  $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$ .
3. Montrer que  $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$

**Exercice 10**

On donne  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on pose  $\sigma = ab + bc + ac, s = a + b + c$ .

1. Montrer que  $M$  est orthogonale ssi  $\sigma = 0$  et  $s \in \{-1, 1\}$ .
2. Montrer que  $M \in SO_3(\mathbb{R})$  ssi  $\sigma = 0$  et  $s = 1$ .
3. ( $\star$ ) Montrer que  $M \in SO_3(\mathbb{R})$  ssi il existe  $k \in [0, \frac{4}{27}]$  tel que  $a, b, c$  sont les racines de  $X^3 - X^2 + k$

**Exercice 11**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $f : P \mapsto (3 - X)P'(X) - P(X) + X^2P''(X)$  définie sur  $E$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique.
3. Est-il diagonalisable ?
4.  $f$  est-il un automorphisme ?

**Exercice 12**

Soit  $n$  un entier naturel impair et  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$ .

1. Montrer que le polynôme  $X^n - 1$  vérifie la relation  $(E)$ .

2. Déterminer le degré du polynôme  $P$ .
3. Notons  $\omega$  une racine  $n$ ème de  $-1$ . Montrer que  $-\omega$  est racine de  $P$ .
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant  $(E)$  ?

**Exercice 13**

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$ .

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de  $f \circ g$  est valeur propre de  $g \circ f$ .
2. Montrer que si  $E$  est de dimension finie, toute valeur propre de  $f \circ g$  est valeur propre de  $g \circ f$ .
3. Dans cette question  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $f : P \mapsto XP$  et  $g : P \mapsto P'$ .  
Montrer que  $f$  et  $g$  sont des endomorphismes de  $E$ . Montrer que 0 est valeur propre de  $f \circ g$ . 0 est-il valeur propre de  $g \circ f$  ? Conclure.

**Exercice 14**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  à valeurs réelles.

On considère  $\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$  définie sur  $E \times E$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  on pose  $I(a, b, c) = \int_{-1}^1 (|x| - ax^2 - bx - c)^2 dt$ . Trouver  $(a, b, c)$  pour que  $I(a, b, c)$  soit minimale.
3. Calculer ce minimum.

**Exercice 15**

Soient  $n, d \in \mathbb{N}$  avec  $d \leq n$ .

Soit  $Q$  un polynôme de degré  $d$  et  $f_Q$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $f_Q(P) = (P \times Q)^{(n)}$ .

1. Montrer que  $f_Q$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $Q$  pour que  $f_Q$  soit un automorphisme.
3. Dans le cas où  $n = 2$  et  $Q = X - 1$ , trouver les éléments propres de  $f$ .
4. Même question dans le cas  $n = 2$  et  $Q = X^2 - 1$ .
5. A quelle(s) condition(s) sur  $Q$ ,  $f$  est-il diagonalisable.

**Exercice 16**

Soit  $E = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$  l'ensemble des endomorphismes de  $\mathbb{C}$  considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Montrer que  $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ .
2. Calculer le déterminant et la trace de  $f_{a,b}$ .

3. Donner une CNS pour que  $f_{a,b}$  soit diagonalisable.

**Exercice 17**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2Id = 0$ .

1. Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
2. Prouver que  $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$ .
3. On suppose maintenant que  $E$  est de dimension finie.  
Montrer que  $\text{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$ .

**Exercice 18**

On pose  $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\varphi : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt \end{cases}$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soient  $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$  et  $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$ . Montrer que  $V$  et  $W$  sont supplémentaires orthogonaux.
3. Soit  $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$ . Calculer  $\inf_{f \in E_{a,b}} (\int_0^1 (f^2 + f'^2))$ .

**Exercice 19**

1. Montrer que  $\forall (u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4 \quad (ux + vy)^2 \leq (u^2 + v^2)(x^2 + y^2)$
2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2. On note  $S$  l'ensemble des vecteurs unitaires de  $E$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base orthonormale de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - (a) Montrer que  $\forall x \in S \quad \|f(x)\| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ .
  - (b) On pose alors  $N(f) = \sup_{x \in S} \|f(x)\|$ . Déterminer  $N(f)$  lorsque  $M$  est diagonale.
  - (c) Que vaut  $N(f)$  si  $f$  est une isométrie ?