Exercice 1

1. (a) g est définie sur $D = \{x \in \mathbb{R} |\ ax > 0\} = \mathbb{R}_+^*$ car $a > 0$. De plus, g est dérivable sur D en tant que composée de deux fonctions dérivables.
   (b) Soit $x > 0$. $g'(x) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$ Ainsi $(g - \ln)' = 0$ et donc cette fonction est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $\forall x > 0\ g(x) = \ln(x) + K$.
   (c) On évalue la relation précédente en 1. On trouve $g(1) = \ln(a) = \ln(1) + K = K$. Ainsi pour tout $x > 0$ on a $\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$.
2. On a maintenant $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln(1) = 0$. Ainsi $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.
3. On veut calculer la limite en 0 de ln. Soit $x > 0$. On pose $t = \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$. Or $\ln(x) = \ln(\frac{1}{t}) = -\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$. Finalement $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} -\infty$
4. (a) Directement, $\int\limits_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$ car ln est une primitive de f.
   (b) Soit $t \geqslant 1$. On a alors $0 < \sqrt{t} \leqslant t$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$.
   (c) On intègre la relation précédente entre 1 et x Remarquons que $x \geqslant 1$ et donc on intègre "dans le bon sens". On obtient $\ln(x) \leqslant \int\limits_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Or
   $$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = [2t^{\frac{1}{2}}]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1)$$
   (d) On divise la relation précédente par $x > 0$: $\frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$. De plus, pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{\ln x}{x}$. Finalement, par encadrement, $\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
5. Soit $x > 0$. On pose $u = \frac{1}{x}$ et donc $u \to +\infty \iff x \to 0^+$. Alors $x\ln(x) = -\frac{\ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0^-$. Donc $x \ln x \underset{x\to 0}{\to} 0$
6. La tangente à la courbe de ln en 1 à pour équation $y = \ln(1) + \ln'(1)(x - 1) = x - 1$.