

Intégrales sur un segment : révisions

Exercice 1 (Les incontournables)

Calculer directement une primitive de (on précisera l'intervalle) :

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 4. $x \mapsto e^{i\pi x + \sqrt{729}x}$ | 7. $x \mapsto \cos(e^2x - 728435)$ |
| 2. $x \mapsto \sqrt[42]{x}$ | 5. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{(2x+7)^2+1}$ | 9. $w \mapsto -3w + \text{ch}(4w)$ |

Exercice 2

Donner des primitives, en précisant l'intervalle, de :

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$ | 4. $x \mapsto \exp(e^x + x)$ | 7. $x \mapsto \tan^2(x)$ |
| 2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$ | 5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+\ln(3x)}}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$ | 9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ |

Exercice 3

Calculer

- $\int \sin(x)e^{2x} dx$
- $\int \sin(t) \text{sh}(t) dt$

Exercice 4

Sans utiliser les propriétés de \ln , montrer que pour $a, b > 0$ on a $\int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt$.

Exercice 5

Calculer, en changeant de variable

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ avec $u = \cos(t)$ | 3. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$ avec $t = \frac{1}{u}$. |
| 2. $\int \frac{1}{\text{ch}(x)} dx$ avec $t = e^x$. | 4. $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \sin(\theta)$. |

Convergence

Exercice 6

Etudier la convergence des intégrales :

- | | |
|--|---|
| 1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, 1]$ | 6. $t \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{t}$ sur $[1, +\infty[$. |
| 2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$. | 7. $t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1, +\infty[$. |
| 3. $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[0, +\infty[$. | 8. $t \mapsto e - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1, +\infty[$. |
| 4. $t \mapsto e^{-\ln(t)^2}$ sur $[1, +\infty[$. | |
| 5. $t \mapsto e^{-t \arctan(t)}$ sur $[0, +\infty[$. | |

Exercice 7

Etudier la convergence et calculer le cas échéant :

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$. | 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. | 4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt$. |

Plus technique

Exercice 8

Calculer, **après** avoir prouvé leurs convergences :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ | 3. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ | 4. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ |

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction intégrable. Montrer que $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 10

- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge mais pas $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

On pose maintenant $f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{cases}$.

- Donner un équivalent de f en 0. Indication : au choix une intégration par parties ou une série entière (après avoir ramené l'étude à un intervalle de longueur finie).
- Après avoir montré que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o_{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$, donner un équivalent de f en $+\infty$ en effectuant une intégration par parties.

Avec des paramètres

Exercice 11

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 12

Soit $a > 0$.

1. Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$ est une intégrale impropre convergente.
2. Dans cette question seulement, on pose $a = 1$. Montrer que l'intégrale précédente est nulle grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$. Justifier la convergence et calculer I_n en fonction de n .

Exercice 14

Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ en sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.