I Coordonnées

I.1 Bases du plan

Définition 1

1. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont dits colinéaires si il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ tels que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=0$. (On est obligé d'introduire deux nombres réels si on veut éviter une distinction de cas quand l'un des vecteur est nul).*

   On peut ainsi dire que l'un des deux est proportionnel à l'autre.
2. *Une* base *du plan est la donnée d'un couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ tel que tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. x et y sont alors les* coordonnées (cartésiennes) *de $\vec{w}$*
3. *Une base $(\vec{u},\vec{v})$ est dite orthonormée directe ssi $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$, et l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $(\vec{u},\vec{v})=+\frac{\pi}{2}$.*

Théorème 1
Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs. $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan ssi ils sont non colinéaires ssi la matrice dont ce sont les colonnes est inversible.

I.2 Repères

Définition 2
Un repère *$\mathcal{R}$ (cartésien) du plan est la donnée d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et d'un point O. Si M est un point du plan, il existe alors un unique couple de réel (x,y) tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$. Ce sont les* coordonnées (cartésiennes) *de M dans le repère $\mathcal{R}$.*

Un tel repère est dit orthonormé direct ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe.

Définition 3
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x,y), on appelle norme *de $\vec{u}$ le réel*

$$\|u\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Soient A et B deux points du plan. On appelle distance *de A à B le nombre*

$$d(A,B)=AB=\|AB\|$$

Théorème 2
Soient A,B,C trois points du plan, et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs.

1. *La distance entre deux points (tout comme la norme d'un vecteur) ne dépend pas du choix du repère orthonormal.*
2. *$AC\leqslant AB+BC$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leqslant\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$. Ces distances (resp. normes) sont égales ssi A,B,C sont alignés dans cet ordre (resp. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens)*

I.3 Coordonnées polaires

Définition 4
Soit M un point du plan repéré par un ROND. Tout couple $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_\theta}$ est un couple de coordonnées polaires *de M.*

1. *Les coordonnées polaires de O sont les couples $(0,\theta)$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.*
2. *Si $M\neq O$, on note (r,θ) un couple de coordonnées polaires. Alors $r=OM$ et $\theta=(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ ou alors $r=-OM$ et $\theta=\pi+(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$*

Proposition 1
Il y a unicité des coordonnées polaires si on impose $r>0$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.

II Opérations sur les vecteurs

II.1 Rappels sur les complexes

II.2 Produit scalaire

Définition 5
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le réel $\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.*

Théorème 3 (Propriétés du produit scalaire)
On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}.\vec{v}=0$.*
2. *$\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.*
3. *Propriétés de l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \mathbb{R}\\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v}\end{array}\right.$:*
   (a) ***Symétrie** : $\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{P}\ \vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$*
   (b) ***Bilinéarité** : Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{P}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*

   $$\left\{\begin{array}{lcl}\text{Linéarité à droite} & \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) & \text{et } \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}\\ \text{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w}+\mu\vec{v}.\vec{w} & \end{array}\right.$$
4. *Si $\vec{u}=(x,y)$ et $\vec{v}=(x',y')$ alors $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ De plus cette expression est valable pour des coordonnées dans l'importe quelle BON.*

Corollaire 1
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ *un repère orthonormé du plan. Alors pour tout point* M *et vecteur* $\vec{w}$ *on a* $M : \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM}.\vec{u} \\ \overrightarrow{OM}.\vec{v} \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{w}.\vec{u} \\ \vec{w}.\vec{v} \end{pmatrix}$ *(dans* $\mathcal{R}$*).*

II.3 Déterminant

Définition 6
Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan. On appelle* déterminant *de* $(\vec{u}, \vec{v})$ *et on note* $\det(\vec{u}, \vec{v})$ *le réel* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \textit{si } \vec{u} \neq \vec{0} \textit{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

Théorème 4
1. *Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs. Alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires* $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
2. *Trois points* A, B, C *sont alignés ssi* $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
3. *Si* $\vec{u} = (x, y)$ *et* $\vec{v} = (x', y')$ *alors* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$
4. *Propriétés de l'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \det(\vec{u}, \vec{v}) \end{array} \right.$ *:*
   (a) ***Anti-symétrie*** $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$
   (b) $\left\{ \begin{array}{lrcl} \textit{Linéarité à droite} & \det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) & = & \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w}) \\ \textit{Linéarité à gauche} & \det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) & = & \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w}) \end{array} \right.$

Proposition 2
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ *du plan est directe ssi* $\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0$.

III Equations géométriques

III.1 Généralités

III.2 Droites

Définition 7
Une droite $\mathcal{D}$ *du plan est la donnée d'un point* A *et d'un vecteur directeur* $\vec{u} \neq \vec{0}$. *La droite* $\mathcal{D}$ *est alors l'ensemble des points* B *tels que* $\overrightarrow{AB}$ *est colinéaire à* $\vec{u}$ *ou encore* $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} \iff B - A = \lambda\vec{u} \iff B = A + \lambda\vec{u}$.

On note donc $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$. *Ceci est la représentation paramétrique de* $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ *passe par l'origine du repère, on dira que* $\mathcal{D}$ *est une droite vectorielle et on note* $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$. *Dans tous les cas,* $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ *est appelée la* ***direction de*** $\mathcal{D}$.

Proposition 3
La droite $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ *possède une équation de la forme* $-bx + ay + c = 0$ *où* $c \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D}$ *est une droite vectorielle ssi* $c = 0$.

Proposition 4
Tout ensemble d'équation $ax + by + c = 0$ *avec* a, b *non tous les deux nul est une droite du plan dont* $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur.*

Définition 8
Soit $\mathcal{D}$ *une droite. Un vecteur normal à* $\mathcal{D}$ *est un vecteur orthogonal à tout vecteur contenu dans* $\mathcal{D}$. *(ie. à tout vecteur de la forme* $\overrightarrow{AB}$ *avec* $A, B \in \mathcal{D}$*).*

Proposition 5
Plus précisément, si $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ *alors* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal non nul. L'ensemble des vecteurs normaux à* $\mathcal{D}$ *est alors* $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ *qui est l'unique droite vectorielle perpendiculaire à* $\mathcal{D}$.

Corollaire 2
1. *Un vecteur normal à* $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ *est* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. *Etant donné* $\vec{n} \neq \vec{0}$ *et* A *un point il existe une unique droite passant par* A *et dont* $\vec{n}$ *est un vecteur normal (on pourra dire "et normale à* $\vec{n}$*").*

III.3 Cercles

Définition 9
Le cercle de rayon $R > 0$ *et de centre* Ω *est l'ensemble des points* $\mathcal{C} = \{M | \Omega M = R\}$, *l'ensemble des points à une distance* R *exactement de* Ω.

Proposition 6
Soit $\mathcal{C}$ *le cercle de rayon* $R > 0$ *et de centre* $\Omega : \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$. $\mathcal{C}$ *a pour équation* $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

Proposition 7
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $R > 0$. *L'ensemble d'équation* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ *est le cercle de rayon* R *et de centre* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Proposition 8
Soient A, B *deux points distincts fixés du plan. L'ensemble des points* M *vérifiant* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ *est le cercle de diamètre* $[AB]$.