Devoir maison de l'avent

Un rendu par vendredi en décembre. Les dates en question sont en **gras**. Dernier rendu le lundi de la rentrée 04/01.

Exercice 1

1. Mardi 01/12 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Rappeler la définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner un lien entre $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
   On donnera X en fonction de X' et X' en fonction de X.
2. 02/12 : Soient $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ trois suites complexes. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n + \lambda_3\gamma_n$.
   Montrer que si $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont bornées alors (u_n) est bornée.
   Rappel : (α_n) est bornée se traduit par l'existence d'une constante (ie indépendante de n) $M_a \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\alpha_n| \leqslant M_a$.
3. 03/12 : Une histoire de rennes.
   Trois rennes notés A, B et C jouent à saute–renne [1] dans un grand champ. A saute par dessus B et se retrouve en position symétrique (par rapport à B). Puis B saute par dessus C et enfin C saute par dessus A (qui avait déjà bougé) et on recommence jusqu'à épuisement des joueurs.
   On repère les positions de nos rennes dans un repère orthonormé du plan par leurs affixes complexes. Au départ l'affixe de A est a_0, celle de B est b_0 et celle de C est c_0.
   (a) 03/12 : Calculer a_1, b_1 et c_1 les affixes respectives de A, B et C au bout d'une phase de jeu. On pourra introduire des affixes de vecteurs.
   (b) **04/12** : On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = M^n X_0$.
   (c) 05/12 : Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(\lambda I_3 - M) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 1$.
   (d) 06/12 : Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - M) = 0$. On note λ_1 la solution entière, λ_2, λ_3 les deux autres solutions.
   Montrer que $E_i = \ker(\lambda_i I_3 - M)$ est de dimension au moins 1 pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, sans calculer de base de ces espaces.
   (e) 07/12 : Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ est directe. On pourra remarquer (et montrer) que $u \in E_i$ ssi $Mu = \lambda_i u$.
   (f) 08/12 : Déterminer une base de E_1. On note $u \in \mathbb{C}^3$ le vecteur directeur de E_1 qui a 1 comme première coordonnée.
   (g) 09/12 : On pose $\varepsilon = \pm 1$. Quelle est la dimension de E_2 ? E_3 ? Quelle est la conséquence sur le système $MX = (-2 + \varepsilon\sqrt{5})X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$? En particulier quel est le rang de ce système.
   (h) 10/12 : Résoudre le système précédent. On note v un vecteur directeur de lorsque $\lambda_i = -2 - \sqrt{5}$ et w un vecteur directeur dans l'autre cas.
   (i) **11/12** Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
   (j) 12/12 : Montrer que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (où f est l'endomorphisme canoniquement associé à M) et exhiber une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1}.
   Exprimer ensuite M^n puis X_n en fonction de P, D, P^{-1}.
   (k) 13/12 : On pose $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = Y_n = P^{-1}X_n$ les coordonnées de X_n dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les 3 suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont géométriques de raisons à préciser.
   (l) 14/12 : Soit $q \in \mathbb{C}$. A quelle condition $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
   (m) 15/12 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur α_0, β_0 et γ_0 pour que $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) soient 3 suites bornées.

1. une variante du saute mouton classique

(n) 16/12[2] : Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont toutes les trois bornées ssi $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont toutes les 3 bornées.

(o) 17/12 : Montrer que nos 3 rennes restent dans une partie bornée du plan (ie. ne sortent pas de notre grand champ) ssi X_0 appartient à un certain plan vectoriel (sous espace de $\mathbb{C}^3$) dont on donnera une base ainsi qu'une équation cartésienne.

4. 18/12 : Une histoire de Père Noël.

Ce cher vieux bonhomme a pour mission de distribuer n cadeaux (distincts) à n enfants. Malheureusement ses yeux ne sont plus ce qu'ils étaient...

On considère que l'enfant numéro $i \in [\![1, n]\!]$ souhaite recevoir le cadeau numéro $i \in [\![1, n]\!]$.

(a) **18/12** : On représente une distribution par un n-uple : on place dans l'ordre les numéros des cadeaux. Le premier élément est le numéro du cadeau donné au premier enfant, le deuxième élément le numéro du cadeau donné au deuxième enfant et ainsi de suite.

Dans le cas $n = 2$ on a donc 2 distributions possibles : $(1, 2)$ et $(2, 1)$. La seconde est une mauvaise distribution car aucun enfant n'obtient le cadeau souhaité.

Donner la liste de toutes les distributions possible de 3 cadeaux.

(b) 19/12[3] : Dans le cas général, combien y a-t-il de distributions possibles ?

(c) 20/12 : On note D_n le nombre de distribution où aucun enfant ne reçoit le cadeau qu'il souhaitait. Calculer D_1 et D_3. On a déjà vu que $D_2 = 1$

(d) 21/12[4] : On admet que pour $n \geqslant 1$, on a $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$. Calculer D_4 et D_5.

(e) 22/12 : Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = D_{n+1} - (n+1)D_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire que $\forall n \geqslant 1\ D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$

(f) 23/12 : Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1\ D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

(g) 24/12 : Donner l'expression de la probabilité p_n pour que le Père Noël effectue une distribution où aucun enfant en reçoit le cadeau qu'il souhaite. On considère que sa vue est tellement basse que chaque distribution est aussi probable.

Montrer que $p_n \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-1}$.

Indications

- 3.d on pourra éventuellement introduire les endomorphismes canoniquement associés : h_i canoniquement associé à $\lambda_i I_3 - M$. Que dire du rang de h_i ?
- 3.g vu que la somme de 3e est directe, on peut dire que....
- 3.h On peut sans problème utiliser la question précédente pour accélérer la résolution du système : il est de rang ... donc on garde ... lignes libres.
- 3.j Voir le DS 2
- 3.k Trouver un lien entre Y_n, D^n et Y_0.

2. Question plus délicate. on se servira deux fois de la question du 02/12
3. Vacances ! Mais nous n'en avons pas fini avec notre histoire.
4. Joli palindrome...