

# Table des matières

**I Fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$**

I.1 Norme, distance . . . . . 1

I.2 Continuité, dérivabilité . . . . . 1

I.3 Taylor-Young . . . . . 2

**II Etude de courbes**

II.1 Courbes dans  $\mathbb{R}^2$  . . . . . 2

II.2 Domaine d'étude . . . . . 2

II.3 Tangentes, variations . . . . . 2

II.4 Points singuliers . . . . . 2

II.5 Branches infinies . . . . . 2

II.6 Plan d'une étude . . . . . 2

## I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

### I.1 Norme, distance

**Définition 1**

Si  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , sont de coordonnées  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  et  $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , alors le produit scalaire (canonique) de  $X$  et  $Y$  (noté  $\langle X, Y \rangle$  ou  $(X|Y)$ ) est

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La norme de  $X$  est donnée par  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  et la distance de  $X$  à  $Y$  est  $\|X - Y\|$ . On note cette dernière  $d(X, Y)$ .

**Proposition 1**

- Le produit scalaire est symétrique ( $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ ), bilinéaire, positif ( $\langle X, X \rangle \geq 0$ )
  - La norme vérifie :
    - $\|X\| = 0 \iff X = 0$
    - $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
    - $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
    - $|\|X\| - \|Y\|| \leq \|X \pm Y\|$
    - Pour  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{R}^p$  et  $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p \quad \left\| \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \|X_i\|$
- Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire

### I.2 Continuité, dérivabilité

**Définition 2**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction,  $a \in I$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  admet  $b$  comme limite en  $a$  (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \quad |t - a| \leq \alpha \implies \|f(t) - b\| \leq \varepsilon$$

Dans le cas où  $b$  existe, elle est unique et vaut  $f(a)$ . On dit alors que  $f$  est continue en  $a$ .  
 $f$  est dite continue sur  $I$  si elle est continue en tout point  $a$  de  $I$ .

**Proposition 2**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  (les **fonctions**  $f_1, \dots, f_n$  sont appelées applications coordonnées). Soit  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in I$ .

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = b \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = b_i$$

**Proposition 3**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dérivable (en un point ou sur  $I$ ) ssi ses fonctions coordonnées  $f_1, \dots, f_n$  le sont et on a alors  $f' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix}$ .  $f$  est alors continue.

**Proposition 4**

L'application  $D : f \mapsto f'$  est linéaire de  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$  dans  $(\mathbb{R}^n)^I$  ie pour  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivables et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ .

**Proposition 5**

- Soient  $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$  et  $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$  ( $v$  est à valeurs dans  $I$ ).
- $u \times f$  est dérivable et  $(u f)' = u' f + u f'$ .
  - Si  $u$  ne s'annule pas  $\frac{1}{u} f$  est dérivable et  $(\frac{1}{u} f)' = \frac{1}{u^2} (u f' - u' f)$
  - $f \circ v$  est dérivable sur  $J$  et  $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
  - $\langle f, g \rangle$  est dérivable et  $(\langle f, g \rangle)' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
  - (cas  $n = 3$ )  $f \wedge g$  est dérivable et  $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$ .
  - (cas  $n = 2$ )  $\det(f, g)$  est dérivable et  $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$ .

### I.3 Taylor-Young

#### Théorème 1 (Taylor-Young)

Soit  $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$  et  $a \in I$  Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a) \underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!} \underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \cdots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

## II Etude de courbes

### II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

#### Définition 3

Une courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{cases}$ . Le

**support** de la courbe est  $f(I)$  (l'ensemble des points  $M(t)$ , ou encore la trajectoire du point  $M$ ).

#### Définition 4

Soit  $f$  une courbe  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  et  $t_0 \in I$ . Si  $f'(t_0) \neq \vec{0}$ , on dit que le point  $t_0$  est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de  $f$  sont régulier,  $f$  est dite régulière.

### II.2 Domaine d'étude

### II.3 Tangentes, variations

#### Définition 5

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $t_0 \in I$ . On dit que  $f$  possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en  $t_0$  ssi  $\lim_{t \rightarrow a^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$  existe (resp. limite à droite). Notons  $\vec{u}_-$  et  $\vec{u}_+$  ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de  $f$  en  $a$  est alors  $f(a) + \text{Vect}(\vec{u}_-)$  et la demi-tangente à droite est  $f(a) + \text{Vect}(\vec{u}_+)$ , c'est à dire les droites passant par le point  $f(a)$  est dirigées par les vecteurs  $\vec{u}_-$  et  $\vec{u}_+$ . Si ces droites sont confondues ( $\vec{u}_-$  et  $\vec{u}_+$  sont colinéaires) alors la droite obtenue est la tangente à  $f$  en  $a$ .

#### Théorème 2

Si  $t_0$  est un point régulier de la courbe  $f$  alors  $f$  possède une tangente en  $t_0$  dirigée par  $f'(t_0)$ .

### II.4 Points singuliers

### II.5 Branches infinies

#### Définition 6

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $a \in \bar{I}$ . On dit que  $f$  possède une branche infinie au voisinage de  $a$  si  $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow a} y(t)$  existent et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement  $y$  tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement  $x$  tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies et :
  - (a) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Ox)$ .
  - (b) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$  alors on dit que  $f$  possède une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .
  - (c) Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$  est un réel **non nul**, il y a deux cas
    - i. si  $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$  alors on dit que la droite  $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$  est asymptote à  $f$ .
    - ii. sinon on dit que  $f$  admet une branche parabolique de pente  $\alpha$ .

### II.6 Plan d'une étude