Table des matières

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ 1
I.1 Norme, distance . . . 1
I.2 Continuité, dérivabilité . . . 1
I.3 Taylor-Young . . . 2

II Etude de courbes 3
II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$ . . . 3
II.2 Domaine d'étude . . . 3
II.3 Tangentes, variations . . . 3
II.4 Points singuliers . . . 4
II.5 Branches infinies . . . 5
II.6 Plan d'une étude . . . 5

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

En pratique, $n = 2$ ou 3, mais cette distinction n'est pas vraiment nécessaire dans ce qui va suivre.

I.1 Norme, distance

I.1.1 Définition

Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $< X, Y >$ ou $(X|Y)$) est

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

I.1.2 Proposition

1. Le produit scalaire est symétrique ($< X, Y >=< Y, X >$), bilinéaire, positif ($< X, X >\geqslant 0$)
2. La norme vérifie :
   — $\|X\| = 0 \iff X = 0$
   — $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$
   — $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$
   — $|\|X\| - \|Y\|| \leqslant \|X \pm Y\|$
   — Pour $(\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{R}^p$ et $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p$ $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i X_i\right\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\|X_i\|$

   Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire

I.2 Continuité, dérivabilité

I.2.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I\ |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

I.2.2 Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** $f_1, \ldots, f_n$ sont appelées applications coordonnées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.

$$\lim_{t\to a} f(t) = b \iff \forall i \in [\![1, n]\!]\ \lim_{t\to a} f_i(t) = b_i$$

Preuve.
Pour $t \in I$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|f_i(t) - b_i| \leqslant \|f(t) - b\|$ (avec égalité ssi toutes les autres coordonnées de $f(t) - b$ sont nulles). Or $f(t) \underset{t\to a}{\to} b \iff \|f(t) - b\| \underset{t\to a}{\to} 0$.

Ainsi SI $f(t) \underset{t\to a}{\to} b$ ALORS $f_i(t) \underset{t\to a}{\to} b_i$.

Réciproquement, observons que $\|f(t)-b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(t)-b_i)^2}$. Par compositions, somme puis composition (trouver les fonctions), si tous les $f_i(t)-b_i$ tendent vers 0 alors $\|f(t)-b\| \underset{t\to a}{\to} 0$. ■

I.2.3 Remarque

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale, f est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

I.2.4 Dérivabilité

La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien définit dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R}-ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.2.5 Cinématique

Si la fonction f étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors f' est le vecteur vitesse du mouvement.

I.2.6 Proposition
$f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. f est alors continue.

I.2.7 Exemple
$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

I.2.8 Proposition
L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Preuve.
Le vérifier sur chaque coordonnée. ■

I.2.9 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

1. $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
2. Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u}f$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u}f\right)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $< f, g >$ est dérivable et $(< f, g >)' = < f', g > + < f, g' >$
5. (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

I.2.10 Exemple
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de $\|f\|$.

I.3 Taylor-Young

I.3.1 Dérivées d'ordre supérieur

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les même définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre k, de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.3.2 Combinaison linéaire, produit

Les formules de dérivée k-ième usuelles s'appliquent encore (avec les même preuve) dans le cas d'une combinaison de fonctions $\mathcal{D}^k(I,\mathbb{R}^n)$ et dans le cas du produit uf où $u \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R}^n)$ (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

I.3.3 $o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation $o_a(1)$ représente une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) dont la limite en a est $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont des $o_a(1)$ (celui que l'on connaissait). Plus généralement si g est à valeurs réelles, $o_a(g)$ sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des $o_a(g)$ au sens habituel.

I.3.4 Théorème (Taylor-Young)
Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)\underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!}\underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \cdots + \frac{(t-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

II Etude de courbes

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

II.1.1 Définition
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}\right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

II.1.2 Exemple
Quel est le support de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ définie sur $[-\pi, \pi]$? Remarquer que la variable t n'apparaît pas graphiquement.

On note souvent $M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$. Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions x et y mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

II.1.3 Définition
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.1.4 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix}t\\ \varphi(t)\end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{\begin{pmatrix}t\\ \varphi(t)\end{pmatrix} \mid t \in I\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ t\end{pmatrix}$?

II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer I. Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

II.2.1 Méthode générale

Il s'agit d'observer les coordonnées de $M(\varphi(t))$ où $\varphi : t \mapsto -t$ ou $t+T$ ou $t_0 - t$ ou $\frac{1}{t}$... Si les coordonnées obtenues correspondent à une transformation géométrique connue, on réduit l'intervalle d'étude, et on appliquera la transformation au morceau de support déjà tracé.

II.2.2 Exemple
1. Réduire le domaine de $t \mapsto \begin{pmatrix}\ln(t)\\ \frac{2t}{t^2+1}\end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$. Attention à la traduction de la périodicité.

II.2.3 $t_0 - t$

Sur un intervalle du type $[0, t_0]$ on peut toujours essayer de changer t en $t_0 - t$ pour se ramener à une étude sur $[0, \frac{t_0}{2}]$.

Plus généralement, donner la transformation affine correspondante pour l'intervalle $[a, b]$.

II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se “dirige” vers la gauche ou la droite (x est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de y).

II.3.1 Etude des variations

Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour x et y, tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

II.3.2 Cordes

La corde passant par les points (distincts) $M(t)$ et $M(a)$ est dirigée par le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(a)M(t)}\|}$

II.3.3 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to a^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en a est alors $f(a) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(a) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(a)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la droite obtenue est la tangente à f en a.

II.3.4 Théorème
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Preuve.
D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme, $\|f(t) - f(t_0)\| \underset{t_0}{\sim} |t-t_0|\|f'(t_0)\| \neq 0$. Ainsi $\frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|} \underset{t_0}{\sim} \frac{1}{\|f'(t_0)\|} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} \underset{t_0}{\to} \pm \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. ∎

II.3.5 Exemple
Remarquer les tangentes horizontales et verticales de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$.

II.4 Points singuliers

II.4.1 Continuer à dériver

Le raisonnement précédent s'étend sans difficulté cas le cas où $f'(t_0) = 0$ mais $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ pour un $p > 1$ (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus $q > p$ le plus petit entier tel que $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$ est libre.

Alors dans le repère $(M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$, les coordonnées de $M(t)$ (notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

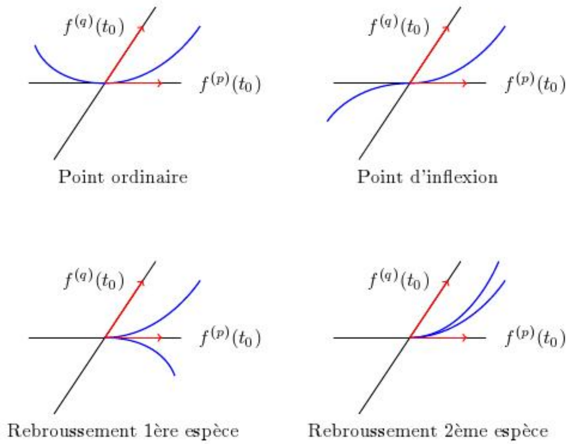
c'est à dire que la courbe "suit" les directions d'abord de sa tangente (de direction $\vec{u}_p$) puis de $\vec{u}_q$.

II.4.2 Cas p=1, q=2

La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de "courbure".

II.4.3 Cas général

Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas suivants.



II.4.4 En pratique

On peut tout à fait utiliser un développement limité de x et y pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

II.4.5 Exemple
Etudier la tangente au point de paramètre 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix}$

Trouver en fonction de $k \in \mathbb{R}$ les éventuels points singuliers de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k\cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

II.5 Branches infinies

II.5.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ existent et qu'on est dans un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.

II.5.2 Exemple

Etudier les branches infinies de $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.

II.6 Plan d'une étude

On pose $f : I \to \mathbb{R}^2$ et on note x et y ses fonctions coordonnées.

1. Souvent, l'intervalle de définition de f ne sera pas donné. il faut alors commencer l'étude par déterminer le domaine de définition de la courbe.
2. Définir ensuite un domaine d'étude le plus restreint possible en utilisant les symétries des expressions pour x et y.
3. Déterminer les variations et les limites de x et y, et on résume ces informations dans un tableau de variations.
4. Exhiber les tangentes "intéressantes" ainsi que les points singuliers s'il y en a.
5. Etudier les branches infinies éventuelles.
6. Tracer la courbe en utilisant toutes les informations précédemment glanées.
7. Repérer s'il y a des points **multiples** (par lesquels la courbe passe plusieurs fois) et les déterminer en trouvant t_1, t_2 tels que $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$.

Index

Taylor-young, 3