Dans toute la fiche, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Adapter les notations

Une première étape fondamentale à l'application des définitions, théorèmes et méthodes est d'adapter les notations du cours pour être cohérentes avec l'exercice.

Si par exemple on travaille dans $E = \mathbb{R}^3$, on ne notera pas $x \in E$ (pour garder la notation x pour une coordonnée plutôt), mais par exemple $u \in E$.

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, de bonnes notations d'éléments de E peuvent être P, Q, A, mais surtout pas P' (qui désigne le polynôme dérivée) ni X (qui désigne l'indéterminée, et qui est aussi un polynôme de degré 1).

I Matrice inversibles

Pour mémoire, les seules matrices qui peuvent éventuellement être inversibles sont les matrices carrées.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. On a alors

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \det(A) \neq 0 \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = n = \text{ taille de } A \\ &\iff \ker(A) = \{0_{K^n}\} (\text{ la seule colonne solution de } AX = 0 \text{ est } X = 0) \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } K^n \\ &\iff (L_1, \dots, L_n) \text{est une base de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ AB = I_n \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) BA = I_n (\text{ pour ces deux derniers cas, on a alors } B = A^{-1}) \end{aligned}$$

II Sur les familles de vecteurs

II.1 Matrice d'une famille

Rappel : pour construire la matrice d'une famille $u_1, \dots, u_p$ dans une base $\mathcal{B}$, on calcule chaque colonne de la matrice comme colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire qu'on exprime u_j comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ et on note les coefficients comme $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice.

II.2 Familles libres

— Savoir prouver par la méthode/définition qu'une famille est libre : pour montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, on prend $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires et on **suppose** $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0_E$. On finit par en déduire que tous les α_k sont nuls, ce qui prouve la liberté.

— Savoir prouver qu'une famille est liée en trouvant **une** combinaison linéaire nulle non triviale.

— Si $\dim(E) = n$, alors une famille libre peut avoir au maximum n vecteurs, mais peut en avoir strictement moins. Par exemple, 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont forcément liés.

— Cas particulier de 2 vecteurs : libre veut dire non colinéaires.

— Cas particulier de 3 vecteurs : libre veut dire non coplanaires.

II.3 Familles génératrices

— L'espace **engendré** par les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ est $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ qui est le sous-espace de E contenant toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

— On a évidemment $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{p+1})$.

— Si $\dim(E) = n$, une famille génératrice de E (c'est à dire qu'elle engendre E en entier) possède au moins n vecteurs, et peut en compter strictement plus.

— 2 vecteurs engendrent au maximum un plan.

II.4 Bases

- Une base de E est une famille à la fois libre et génératrice.
- Si $\dim(E) = n$ alors les bases de E possèdent exactement n vecteurs (ni plus, ni moins d'après les points précédents).
  Par exemple, (u, v) est une base de $\text{Vect}(u, v)$ ssi (u, v) est libre et alors $\text{Vect}(u, v)$ est un plan.
- Prenons une famille de n vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ dans E en supposant que $\dim(E) = n$ (on a **autant** de vecteurs que la dimension de E, $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est une base de } E &\iff \mathcal{F} \text{ est libre} \\ &\iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \\ &\iff \text{rg}(\mathcal{F}) = n = \dim(E) \end{aligned}$$

- Avec les notations du point précédent, en en notant $\mathcal{B}$ une base de E déjà connue (par exemple la base canonique dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}_n[X]$).

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est une base de } E &\iff \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0 \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible} \end{aligned}$$

III Sur les espaces

III.1 Utilisation de la dimension

- Le seul sous-espace de E de dimension 0 est $\{0_E\}$, ou encore $F = \{0_E\}$ ssi $\dim(F) = 0$.
- Les espaces de dimension 1 sont des droites, les espaces de dimension 2 sont des plans.
- La dimension est toujours un entier naturel. On s'en sert souvent pour traiter plusieurs cas lorsque qu'on sait que l'espace cherché est de dimension au maximum 1 (ou 2 ou 3).
- Si $F \subset G$ et que F, G sont des espaces vectoriels, alors $F = G \iff \dim(F) = \dim(G)$.
- Si F, G sont deux sous-espaces de dimension finies alors on a :
  * $F \cap G$ est un sous espace inclus dans F et G et donc dont la dimension est inférieure à la dimension de F à à celle de G.
  * $F + G$ est un sous-espace de E qui contient à la fois F et G.

III.2 Supplémentaires, sommes directes

- Pour une somme de deux (ou plus) espaces de dimensions finies, on dispose du théorème de la base adaptée :
  - La concaténation de familles génératrices (une famille pour chaque espace de la somme) engendre l'espace somme. Par exemple $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3) + \text{Vect}(u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
  - La somme est directe ssi la concaténation de bases (une base par espace dans la somme) est libre (ie est une base de l'espace somme, d'après le points précédent).
    Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^4$, deux plans $P_1 = \text{Vect}(u_1, u_2), P_2 = \text{Vect}(u_3, u_4)$ sont supplémentaires dans E (ils sont en somme directe et l'espace somme est E en entier) ssi (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de E.
- Soient F, G deux sous-espaces de E, espace de dimension finie.

$$F \oplus G = E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases} \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

- $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe dans E (on dit aussi que la somme est directe) ssi pour $u_1, \in F_1, \dots, u_p \in F_p$, si on a $\sum_{k=1}^{p} u_k = 0_E$ alors on a forcément $u_k = 0_E$ pour tout k.
  La méthode ressemble à la méthode pour montrer la liberté d'une famille, mais cette fois on montre directement que les vecteurs sont nuls.

IV Sur les applications linéaires

Ici on prend $f \in \mathcal{L}(E)$

IV.1 Noyau, image

— $\ker(f)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0_E$, d'inconnue $x \in E$.

— Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\ker(f)$ est composé des colonnes X tells que $AX = 0_{\mathbb{K}^n}$ (c'est à dire $\ker(f) = \ker(A)$ dans ce cas).

— Si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ (par exemple, on connaît une base de E), alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$.

— Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\text{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A (c'est à dire $\text{Im}(f) = \text{Im}(A)$ dans ce cas).

— On a, dans le cas E de dimension finie, $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$.

— Toujours en dimension finie, $\ker(f) \neq \{0_E\} \iff \text{rg}(f) < \dim(E)$.

Dans le cas où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}(f)}$ et $\mathcal{B}$ n'est pas la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on ne peut pas dire que $\ker(f) = \ker(A)$ ni $\text{Im}(f) = \text{Im}(A)$. Par contre, $\ker(A)$ (resp. $\text{Im}(A)$) contient comme éléments exactement les colonnes des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\ker(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$), et il suffit de convertir ces colonnes en éléments de E (on connaît en fait les coefficients de la combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$).

IV.2 Bijectivité

On suppose ici E de dimension finie. On note $\mathcal{B}$ une base de E.

— f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ (valable en dimension infinie aussi)

— f est surjective ssi $\text{Im}(f) = E$ (valable en dimension infinie aussi)

— f est injective ssi f est surjective. (cette fois, seulement en dimension finie.)

—

$$\begin{aligned} f \in GL(E) \ (f \text{ est bijective}) &\iff \det(f) \neq 0 \\ &\iff \ker(f) = \{0_E\} \\ &\iff \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\iff \text{rg}(f) = \dim(E) \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est inversible} \end{aligned}$$

— En particulier, on la la très importante CNS : $\dim(\ker(f)) \neq 0 \iff \ker(f) \neq \{0_E\} \iff \det(f) = 0$.