

## Table des matières

### I Intégrales dépendant d'un paramètre

I.1 Cadre d'étude . . . . . 1  
 I.2 Continuité . . . . . 1

### II Dérivabilité

II.1 Approche intuitive . . . . . 1  
 II.2 Le théorème . . . . . 1

## I Intégrales dépendant d'un paramètre

### I.1 Cadre d'étude

### I.2 Continuité

#### Théorème 1

Soit  $I, J$  deux intervalles non triviaux de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  une fonction.

Supposons que :

1. Pour  $x \in I$  fixé,  $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $J$ .
2. Pour  $t \in J$  fixé,  $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $I$ .
3. (hypothèse de domination) Il existe  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive, continue et **intégrable** sur  $J$  telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad |\varphi(x, t)| \leq g(t)$$

Alors la fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$  est définie et continue sur l'intervalle  $I$ .

#### Proposition 1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ .

## II Dérivabilité

### 1 II.1 Approche intuitive

### 1 II.2 Le théorème

#### 1 Théorème 2

Soit  $I, J$  deux intervalles non triviaux de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  une fonction.

1 Supposons que :

1. Pour  $x \in I$  fixé,  $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $J$  et **intégrable** sur  $J$ .
2. Pour  $t \in J$  fixé,  $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
3. Pour  $x \in I$  fixé,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \varphi'_t(x)$  est continue sur  $J$
4. (hypothèse de domination) Il existe  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive, continue et **intégrable** sur  $J$  telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$$

Alors la fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $I$ .

De plus, pour  $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt$$