Table des matières

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

Définition 1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\left\{\begin{array}{rcl} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x|y)\end{array}\right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\forall u,v,w\in E\ (\lambda u+\mu v|w)=\lambda(u|w)+\mu(v|w)$ et $(u|\lambda v+\mu w)=\lambda(u|v)+\mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u,v\in E\ (u|v)=(v|u)$.
3. Positive : $(u|u)\geqslant 0$.
4. Définie : $(u|u)=0\Rightarrow u=0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté $\langle u,v\rangle$, ou $u\cdot v$.

Définition 2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.2 Norme et distance

Définition 3
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ie. E est un espace préhilbertien).

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u\in E$ le réel positif $\|u\|=\sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u,v\in E$ le réel positif $d(u,v)=\|v-u\|=\|u-v\|$.

Proposition 1
Soit E un espace préhilbertien et $x,y\in E$.

1. $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2(x|y)+\|y\|^2$
2. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
3. $(x|y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2}=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}$

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $u,v\in E$. Alors

$$|(u|v)|\leqslant\|u\|\|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Corollaire 1 (Minkowski)
Soient $u,v\in E$ (où E est encore un espace préhilbertien).

1. $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\|-\|v\||\leqslant\|u-v\|$

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

Définition 4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $u,v,u_1,\dots,u_n\in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé ssi $\|u\|=1$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $(u|v)=0$. On note $u\perp v$.

3. $(u_1,\dots,u_n)$ est dite orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1,\dots,u_n)$ est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2\ (u_i|u_j)=\delta_{i,j}$.

Proposition 2
Soit E un espace préhilbertien et $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Théorème 2 (Pythagore)
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien.

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

II.2 Bases orthonormées

Théorème 3
Soit E un espace euclidien (donc E est de dimension finie) et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormale** de E. Soient $x,y\in E$.

1. $x=\sum\limits_{i=1}^n (x|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée[1] de x sur le vecteur e_i est $(x|e_i)$.
2. On note $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées de y dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(x|y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \text{ et } \|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2=\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$
3. Si on note $X=\mathrm{Mat}_B(x)$ et $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ (les colonnes des coordonnées), $(x|y)={}^tXY$.

Corollaire 2
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de E. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On note $A=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ a_{i,j}=(f(e_j)|e_i)$.

II.3 Créer des bases orthogonales ou orthonormales

Théorème 4 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit E un espace euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors il existe une base $(u_1,\dots,u_n)$ de E vérifiant

— $(u_1,\dots,u_n)$ est orthogonale
— $\forall k\in[\![1,n]\!]\ \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$.

On peut imposer $\|u_i\|=1$, c'est à dire que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\|\neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|u_k)>0$ pour tout k, alors la famille obtenue est unique.

Corollaire 3
Dans un espace euclidien on peut compéter toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (resp. orthonormale) en une base orthogonale (resp. orthonormale).

III Espaces orthogonaux

III.1 Orthogonal d'un sev

Définition 5
Soient F,G deux sous-espaces de E, un espace préhilbertien.

1. On dit que $x\in E$ est orthogonal à F ssi $\forall x_F\in F\ (x|x_F)=0$
2. F et G sont dits orthogonaux ssi $\forall (x_F,x_G)\in F\times G\ (x_F|x_G)=0$.

Proposition 3
Soient F,G deux sous-espaces de E, un espace préhilbertien. On suppose que $F=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_r)$ $\mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_s)$.

1. Soit $x\in E$, $x\perp F$ ssi $\forall i\in[\![1,r]\!]\ x\perp f_i$.
2. $F\perp G$ ssi $\forall i\in[\![1,r]\!]\forall j\in[\![1,s]\!]\ f_i\perp g_j$.

Il suffit de vérifier l'orthogonalité sur une famille génératrice pour prouver l'orthogonalité à un espace.

Définition 6
Soit F un sev de E. L'orthogonal de F est $F^\perp=\{x\in E|\ \forall x_F\in F\ (x_F|x)=0\}$. $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

Proposition 4
Soit F un sev de E.

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et la somme $F+F^\perp$ est directe.
2. Si F est de dimension finie alors $F\oplus F^\perp=E$ ie F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.

1. ce résultat est très utile en physique

III.2 Projections et symétries orthogonales

Définition 7
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Proposition 5
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(u_1, \ldots, u_r)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E \; p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est **de norme 1**.

Définition 8
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

Proposition 6 (Inégalité de Bessel)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

$$\forall x \in E \; \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Théorème 5 (Moindres carrés)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

IV Automorphismes orthogonaux

IV.1 Isométries

Définition-Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y \; (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E \; \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Proposition 8
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Proposition 9
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par f.

IV.2 Matrices orthogonales

Définition 9
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi l'endomorphisme $f_M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$ canoniquement associé à M est orthogonal (pour le produit scalaire canonique).

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n.

Théorème 6
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^tMM = I_n$ et $M{}^tM = I_n$.
3. ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

Proposition 10
Soit E un espace euclidien, soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E et $\mathcal{B}'$ une base de E. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors $\mathcal{B}'$ est une BON ssi $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 11
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

Proposition 12
Soit E un espace euclidien.

1. Soit $\mathcal{B}$ une BON de E et $f \in O(E)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
2. Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est une BON quelconque de E alors l'endomorphisme f tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ est orthogonal.

Proposition 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{ est symétrique et } f \in O(E) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

Théorème 7
Soit $f \in O(E)$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(f) = \pm 1$, $\det(M) = \pm 1$

Définition 10

1. L'ensemble des isométries de E de déterminant 1 est noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E. $f \in SO(E)$ est dite positive (et si $\det(f) = -1$, on dira que f est une isométrie négative)
2. $SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) | \ \det(M) = 1\}$.

Définition 11
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

Proposition 14
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe et obtenir toujours la même valeur.

V Matrices symétriques réelles

V.1 Lien avec le produit scalaire

Définition 12
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 15
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Théorème 8
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

V.2 Théorème spectral

Théorème 9
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.