

Exercice 1

Calculer les DL suivants au voisinage de 0

1. $\sqrt{1 + \sin x}$ à l'ordre 3.

2. $e^{\cos x} - (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.

3. $\frac{xe^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 2.

4. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^k + o(x^n)$.

5. $\ln(e^x + \cos(x))$ à l'ordre 2 en 0.

6. $\sin^4(x)$ à l'ordre 7 en 0.

Exercice 2

Calculer les DL suivants :

1. $\sin x \cos(3x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2.

2. $\frac{\ln x}{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

3. \exp à l'ordre 7 au voisinage de 2.

4. \tan à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_0 \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x}$.

2. $\lim_1 \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$.

3. $\lim_0 \left(\frac{\arctan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Exercice 4 (non corrigé en cours)

Prouver les limites :

1. $(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \rightarrow e$

2. $a > 0, \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a$

3. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \xrightarrow{0^+}$

4. $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{0} \sqrt{ab}$ pour $a, b > 0$.

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Montrer que f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et donner les positions relatives de la courbe représentative de f et de cette asymptote.

Exercice 6

On définit f sur \mathbb{R}^+ par $f(0) = 0$ et $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ pour les $x > 0$.

1. Montrer (proprement) que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et calculer f' sur cet intervalle.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3. Trouver la limite en f' en 0^+ . En déduire que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 7

Tracé de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.