Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1
Partie I : un exemple numérique

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pose $A_0 = U_0{}^tV_0$

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base de $E_0(A_0) = \ker(A_0)$.
2. Calculer A_0U_0.
3. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A_0 = PDP^{-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
6. Grâce au calcul de A_0^2, caractériser géométriquement l'endomorphisme f_0

Partie II : caractérisation des matrices de rang 1

Soit U, V deux matrices colonnes **non nulles** de $\mathbb{R}^n$. On note $u_1, \ldots, u_n$ les coefficients de U et $v_1, \ldots, v_n$ les coefficients de V.

1. On pose $A = U{}^tV = (a_{i,j})$
   (a) Déterminer la taille de A ainsi que la valeur de a_{ij} pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, en fonction des coefficients de U et V.
   (b) Calculer $\mathrm{tr}(A)$. Que dire de U et V lorsque $\mathrm{tr}(A) = 0$?
   (c) Calculer le rang de A.
2. On pose maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note $C_j(M)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.
   (a) Interpréter en une phrase, portant sur les colonnes de M, l'hypothèse $\mathrm{rg}(M) = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que
   $$\forall j \in [\![1, n]\!] \exists \alpha_j \in \mathbb{R} \; C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$$
   (c) Montrer qu'il existe deux colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ telles que $M = X{}^tY$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(M) = 1$.
4. Question bonus : Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{rg}(M) = 1$, montrer que $\mathrm{tr}(M) \neq 0$ ssi M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0.
3. On souhaite maintenant calculer I_1.
   (a) Première méthode. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, puis en déduire la valeur de I_1.
   (b) Deuxième méthode.
      i. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Justifier rapidement que th est dérivable et donner deux formes de sa dérivée.

ii. Vérifier que l'on peut effectuer le changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$ dans l'intégrale I_1 et effectuer ce changement de variable pour calculer I_1.

4. On souhaite maintenant montrer que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (b) En utilisant une intégration par parties sur l'intégrale I_n, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \qquad (\star)$$
   (c) En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
5. En utilisant la relation $(\star)$, montrer que $(n+1)I_n I_{n+1}$ est une constante que l'on explicitera.
6. En utilisant la relation $(\star)$, mais sans effectuer de récurrence, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}\ I_{2n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} I_0$$
7. En déduire que $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.
8. On avait montré en cours puis en TD que l'on peut écrire $n! \underset{+\infty}{\sim} k\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$ où $k \in]0,+\infty[$ est une constante. Grâce à la question précédente, déterminer la valeur de k.

Exercice 3 (Une courbe paramétrée)
On considère la courbe paramétrée définie par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{2}{t} \\ t^2 + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$.

On note Γ son support.

1. Préciser le domaine sur lequel vous allez étudier f.
2. Donner les variations de x, y.
3. En quel(s) point(s) régulier la courbe présente-t-elle une tangente verticale ou horizontale ?
4. Préciser toutes les intersections de Γ avec les axes (Ox) et (Oy) et préciser la tangente en chaque point trouvé.
5. Etude quand $t \to \pm\infty$
   (a) Montrer que la courbe admet une asymptote en $\pm\infty$.
   (b) Préciser la position de Γ par rapport à cette asymptote, en étudiant le signe d'une certaine quantité.
6. Etude quand $t \to 0$
   (a) La courbe admet-elle une branche infinie quand t tend vers 0^+ ? vers 0^- ? Si oui les préciser.
   (b) Déterminer les coefficients $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
   $$y(t) - ax(t)^2 - bx(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$$
   On dit que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx$ est asymptote à la courbe en 0.
   (c) En étudiant le signe de $t \mapsto y(t) - ax(t)^2 - bx(t)$, préciser la position de $\mathcal{P}$ par rapport à Γ.
   On montrera que $\mathcal{P}$ et Γ n'ont qu'un seul point en commun sans chercher à exprimer les coordonnées exacte de ce point.
7. Montrer que la courbe admet une tangente de pente $\frac{4}{3}$ au point de paramètre -1.
8. Etude des éventuels points doubles.
   Soient t, u dans le domaine de définition de f tels que $t < u$.
   (a) On pose $S = t + u$ et $P = tu$.
   Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi $\begin{cases} SP = -2 \\ S(P^2 - 1) = 0 \end{cases}$.
   μ-remarque : on a noté comme d'habitude $M(t)$ le point de la courbe de paramètre t.
   (b) Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi t et u sont racines de l'équation polynomiale $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ d'inconnue α. On montrera au passage que $S \neq 0$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique point double dont on calculera les coordonnées.
9. Tracer sur un même schéma la droite d'équation $y = x$ ainsi que la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4}$. On prendra une échelle permettant de placer les points dont les abscisses sont dans $[-10, 10]$ et les ordonnées dans $[0, 20]$.
10. Tracer Γ sur la figure précédente[1] !
    On donne, en cas de besoin, les valeurs approchées suivantes : $2^{\frac{1}{3}} \approx 1,3$, $2^{\frac{2}{3}} \approx 1,6$ et $2^{-\frac{2}{3}} \approx 0,6$.

1. Où au moins, placer les points et tangentes que vous avez étudié !