Devoir maison 11

A rendre le au plus tard le 19/01/2021.

Exercice 1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres de A.
2. Calculer les espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?
3. On cherche à trigonaliser la matrice A.
   (a) On pose $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. On cherche une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Que doivent vérifier les vecteurs u, v, w pour que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit bien égale à T ? En déduire des valeurs convenables pour u et v.
   (b) Trouver $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) = v + w$ où v est le vecteur que vous avez trouvé à la question précédente.
   (c) Vérifier que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Donner une matrice P telle que $T = P^{-1}AP$.

Indications

1. le résultat est très simple.
2. d'après la suite de l'exercice, A ne doit pas être diagonalisable.
3. (a) la famille (u, v) doit être libre, et on a pas besoin de calcul supplémentaire pour l'exhiber.
   (b) attention à bien identifier quelle est l'inconnue et de que l'on connaît.
   (c) contrairement à la diagonalisation, on a pas de résultat de cours qui garanti que la famille (u, v, w) est bien une famille libre.
   (d)