Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Partie I : un exemple numérique

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pose $A_0 = U_0{}^tV_0$

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base de $E_0(A_0) = \ker(A_0)$.

   Correction On a déjà $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $rg(A_3) = 1$ et donc 0 est valeur propre de A_0. L'espace propre associé est $\ker(A_0) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ (la famille est libre par construction via l'algorithme de Gauss).

2. Calculer A_0U_0.

   Correction Faisons les malins : $A_0U_0 = U_0{}^tV_0U_0 = U_0(V_0|U_0)$ (produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^4$). Donc $AU_0 = U_0$.

3. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

   Correction Le calcul précédent montre que U_0 est un vecteur propre (il est non nul) associé à la valeur propre 1. Ainsi il existe une base constituée de vecteur propres et A_0 est diagonalisable.

4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

   Correction On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteur propre que nous avons exhibée.

   Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

   Correction Pour $n = 0$ on a $A^n = I_4$ et pour $n > 0$, on remarque que $D^n = D$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = A$.

6. Grâce au calcul de A_0^2, caractériser géométriquement l'endomorphisme f_0 canoniquement associé à A_0.

   Correction EN particulier pour $n = 2$, on a $A^2 = A$ donc A est la matrice dans la base canonique de la projection par rapport à $\ker(A - I_3) = \text{Vect}(U_0)$ dans la direction $\ker(A)$ qui est l'hyperplan normal à V_0 (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$), ie d'équation $x - y + 2z - t = 0$ (qui est bien l'équation qu'on a résolu pour trouver une base de ce noyau d'ailleurs...).

Partie II : caractérisation des matrices de rang 1

Soit U, V deux matrices colonnes **non nulles** de $\mathbb{R}^n$. On note $u_1, \ldots, u_n$ les coefficients de U et $v_1, \ldots, v_n$ les coefficients de V.

1. On pose $A = U{}^tV = (a_{i,j})$
   (a) Déterminer la taille de A ainsi que la valeur de a_{ij} pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, en fonction des coefficients de U et V.

   Correction $A = U{}^tV$ est carrée de taille n et si on on a $a_{i,j} = u_i v_j$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.

   (b) Calculer $\mathrm{tr}(A)$. Que dire de U et V lorsque $\mathrm{tr}(A) = 0$?

   Correction $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tUV$. Ainsi cette trace est nulle ssi les colonnes U et V sont orthogonales.

   (c) Calculer le rang de A.

   Correction L'étudiant attentif (voire avisé) se doute qu'il faut prouver que ce rang vaut 1.
   Le calcul précédent montre que pour $j \in [\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A vaut $v_j U$ donc toutes les colonnes de $M = U{}^tV$ sont proportionnelles à U. Ainsi $\mathrm{rg}(M) \leqslant 1$. Comme V est non nulle, il y a au moins un $v_j \neq 0$ et donc la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est non nulle et $A \neq 0$. Finalement $\mathrm{rg}(A) \neq 0$ et donc

   $$\mathrm{rg}(A) = 1$$

2. On pose maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note $C_j(M)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.
   (a) Interpréter en une phrase, portant sur les colonnes de M, l'hypothèse $\mathrm{rg}(M) = 1$.

   Correction $\mathrm{rg}(M) = 1$ signifie que toutes les colonnes de M sont proportionnelles et que $M \neq 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

   $$\forall j \in [\![1, n]\!] \exists \alpha_j \in \mathbb{R}\ C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$$

   Correction j_0 est l'indice d'une colonne non nulle de M qui existe car $M \neq 0$. Alors, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à C_{j_0}.

   (c) Montrer qu'il existe deux colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ telles que $M = X{}^tY$.

   Correction On prend $X = C_{j_0}$ et $Y = (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les calculs de la question 1.a montrent que $A = X{}^tY$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{rg}(M) = 1$.

   Correction $\mathrm{rg}(M) = 1$ ssi il existe deux colonnes non nulles $X, Y \in \mathbb{R}^n$ telles que $M = X{}^tY$

4. Question bonus : Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{rg}(M) = 1$, montrer que $\mathrm{tr}(M) \neq 0$ ssi M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

   Correction On a dans tous les cas $\dim(\ker(M)) = n - 1 = \dim(E_0(M))$ et donc 0 est valeur propre de M et l'espace propre associé est de dimension $n - 1$ exactement.
   Ainsi M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_M possède une racine non nulle (qui sera alors forcément racine simple) ssi la somme des racines de χ_M est non nulle ssi $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Correction En posant $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ par inverse d'une fonction qui ne s'annule pas.
   De plus, $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2+n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+n} \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente car $2+n > 1$. Ainsi, par comparaison de fonctions positives, I_n est bien une intégrale convergente.

2. Calculer I_0.

   Correction Simple calcul de primitive puis de limite : $I_0 = \frac{\pi}{2}$

3. On souhaite maintenant calculer I_1.
   (a) Première méthode. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, puis en déduire la valeur de I_1.

   Correction $t \mapsto 1+t^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition puis quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2} - t^2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$
   Ainsi, pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t = [g(t)]_0^A = g(A) - g(0) = g(A)$. Comme de plus $g(A) \underset{A \to +\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{A^2}} = 1$ on en déduit que $I_1 = 1$.

   (b) Deuxième méthode.
   i. On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Justifier rapidement que th est dérivable et donner deux formes de sa dérivée.

   Correction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus
   $$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$$
   .

   ii. Vérifier que l'on peut effectuer le changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$ dans l'intégrale I_1 et effectuer ce changement de variable pour calculer I_1.

   Correction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme sh est $\mathcal{C}^1$, on peut effectuer le changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$ et alors $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$. On a alors
   $$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u}{(1+\mathrm{sh}^2(u))^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)} \mathrm{d}u = \lim_{u \to +\infty} \mathrm{th}(u) - \mathrm{th}(0)$$
   L'existence de la limite de th est assurée par la convergence de I_1.
   De plus, $\mathrm{th}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{e^u}{e^u}$ et donc $\mathrm{th}(u) \underset{u \to +\infty}{\to} 1$ et $\mathrm{th}(0) = 0$. On retrouve bien $I_1 = 1$.

4. On souhaite maintenant montrer que $I_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

   Correction Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Or pour $t \geqslant 0$, $(1+t^2) \geqslant 1$ et $1 + \frac{n}{2} < 1 + \frac{n+1}{2}$.
   D'après les positions relatives des fonctions puissances sur $[1, +\infty[$, $0 < (1+t^2)^{1+\frac{n}{2}} \leqslant (1+t^2)^{1+\frac{n+1}{2}}$ et par passage à l'inverse, $\frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n+1}{2}}} \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}}$.
   Par croissance des intégrales convergentes, $I_{n+1} \leqslant I_n$.

   (b) En utilisant une intégration par parties sur l'intégrale I_n, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \qquad (\star)$$

   Correction Soit $x > 0$. On calcule $\alpha_x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t$. Or $u' : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto (1+t^2)^{-1-\frac{n}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ et on a $u : t \mapsto t$ et $v' : t \mapsto -(1+\frac{n}{2}) \times 2t \times (1+t^2)^{-1-\frac{n+2}{2}}$.
   Par intégration par parties $\alpha_x = \left[t(1+t^2)^{-1-\frac{n}{2}}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \frac{t^2(n+2)}{(1+t^2)^{1+\frac{n+2}{2}}} \mathrm{d}t$.
   Or $t(1+t^2)^{-1-\frac{n}{2}} \underset{t \to +\infty}{\sim} t \times (t^2)^{-1-\frac{n}{2}} = t^{-1-n} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ et donc le crochet converge vers 0.
   De plus, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{1+\frac{n+2}{2}}} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{1+\frac{n+2}{2}}} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n}{2}}} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{1+\frac{n+2}{2}}} \mathrm{d}t$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient deux intégrales convergentes d'après la question 1 et
   $$I_n = 0 + (n+2)(I_n - I_{n+2})$$
   ou encore $(1-(n+2))I_n = -(n+2)I_{n+2}$, qui peut s'écrire $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(c) En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

Correction Remarquons d'abord que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car il s'agit de l'intégrale d'une fonction strictement positive sur un intervalle non vide. De plus, par décroissance, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ et en divisant par I_n, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Comme $\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, par encadrement on a bien $\frac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

5. En utilisant la relation $(\star)$, montrer que $(n+1)I_nI_{n+1}$ est une constante que l'on explicitera.

Correction Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ et donc la suite considérée est bien constante égale à $1I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

6. En utilisant la relation $(\star)$, mais sans effectuer de récurrence, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ I_{2n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}I_0$$

Correction Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $I_2 = \frac{1}{2}I_0,\ I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0$ et de même $I_6 = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0$.
Ainsi (ici on pourrait utiliser une récurrence), $I_{2n} = \frac{(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}I_0$.
De plus, le dénominateur est $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$ (en factorisant chaque terme par 2) et en multipliant numérateur et dénominateur par ce produit des entiers pairs, $I_{2n} = \frac{2n!}{(2^n n!)^2}I_0 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}I_0$.

7. En déduire que $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Correction On sait que $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} I_{2n+1}$ d'après la question 4c, et $(2n+1)I_{2n}I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $2nI_{2n}^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ par produit d'équivalents et donc $I_{2n}^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}$. Comme $I_{2n} > 0$ on obtient déjà

$$I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

D'après la question 6, on a donc $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Par produit d'équivalents on a donc

$$\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \times 4^n \times \frac{2}{\pi} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

8. On avait montré en cours puis en TD que l'on peut écrire $n! \underset{+\infty}{\sim} k\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$ où $k \in]0,+\infty[$ est une constante. Grâce à la question précédente, déterminer la valeur de k.

Correction On a $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} k\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{2n}$ et $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} k^2\frac{n^{2n}}{e^{2n}}n$.
Ainsi par quotient d'équivalents, $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}2^{2n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{2}}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et donc $k = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3 (Une courbe paramétrée)
On considère la courbe paramétrée définie par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{2}{t} \\ t^2 + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$.

On note Γ son support.

1. Préciser le domaine sur lequel vous allez étudier f.

Correction Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$. C'est le domaine sur lequel on va étudier f.

2. Donner les variations de x, y.

Correction Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus, pour $t \in \mathbb{R}^*$ on a

$$x'(t) = 2t + \frac{2}{t^2} = 2\frac{t^3+1}{t^2} \text{ et } y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4-1}{t^3} = 2\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^3}.$$

On en déduit les tableaux de variations suivants (en prenant garde au fait que $t^3 < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$) :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$		$+$		
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule également des limites en $\pm\infty$ et $0^\pm$ qui ne sont pas indéterminées.

3. En quel(s) point(s) régulier la courbe présente-t-elle une tangente verticale ou horizontale ?

   Correction La courbe présente une tangente horizontale au point de paramètre 1 qui est de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Préciser toutes les intersections de Γ avec les axes (Ox) et (Oy) et préciser la tangente en chaque point trouvé.

   Correction D'après les tableaux de variations, y ne s'annule pas (on le voit aussi sur l'expression de y) et x s'annule une fois entre 1 et $+\infty$. On résout donc l'équation $x(t) = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}^*$.

$$x(t) = 0 \iff t^2 = \frac{2}{t} \iff t^3 = 2 \iff t = 2^{\frac{1}{3}}$$

   On trouve une unique solution. La courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$.

   La tangente en ce point est dirigée par $\vec{f}'(2^{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} x'(2^{\frac{1}{3}}) \\ y'(2^{\frac{1}{3}}) \end{pmatrix}$. Or $x'(2^{\frac{1}{3}}) = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}}$ et $y'(2^{\frac{1}{3}}) = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} - 1$

   Ainsi le coefficient directeur de la tangente en ce point est $\frac{y'}{x'}(2^{\frac{1}{3}}) = \frac{2^{\frac{4}{3}}-1}{3\times 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{4-2^{\frac{2}{3}}}{6}$.

5. Etude quand $t \to \pm\infty$

   (a) Montrer que la courbe admet une asymptote en $\pm\infty$.

   Correction On a en $+\infty$ et $-\infty$, $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$. On étudie donc le quotient $\frac{y}{x}$. Pour $t \neq 0$ et $t \neq 2^{\frac{1}{3}}$ on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 - \frac{2}{t^2}} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

   Ainsi $\frac{y}{x} \underset{\pm\infty}{\to} 1$. On étudie donc maintenant $y - x$ et on trouve $y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} \underset{\pm\infty}{\to} 0$. Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ.

   (b) Préciser la position de Γ par rapport à cette asymptote, en étudiant le signe d'une certaine quantité.

   Correction On a vu que $y(t) - x(t) = t^{-2} + 2t^{-1} \underset{\pm\infty}{\sim} 2t^{-1}$. Ainsi $y(t) - x(t)$ est négatif quand $t < 0$ et positif quand $t > 0$.

   La courbe est donc sous son asymptote en $t \to -\infty$ et au dessus en $t \to +\infty$.

6. Etude quand $t \to 0$

   (a) La courbe admet-elle une branche infinie quand t tend vers 0^+ ? vers 0^- ? Si oui les préciser.

Correction On a encore une fois deux limites infinies, et on doit étudier le quotient $\frac{y}{x}$. Cette fois on a (pour les même t qu'à la question d'avant)

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2+t^{-2}}{t^2-2t^{-1}} \underset{0}{\sim} \frac{t^{-2}}{-2t^{-1}} = -\frac{1}{2t}$$

Donc $\frac{y}{x} \underset{t\to 0^+}{\to} -\infty$ et $\frac{y}{x} \underset{t\to 0^-}{\to} +\infty$.
Dans les deux cas on a un branche parabolique de direction (Oy).

(b) Déterminer les coefficients $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(t) - ax(t)^2 - bx(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$$

On dit que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx$ est asymptote à la courbe en 0.

Correction Soit $t \neq 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y(t)-ax(t)^2-bx(t) = t^2+\frac{1}{t^2}-a\left(t^4-4t+\frac{4}{t^2}\right)-bt^2+\frac{2b}{t} = \underbrace{t^2-bt^2-at^4+4at}_{\underset{t\to 0}{\to} 0}+\frac{1}{t^2}(1-4a)+\frac{1}{t}\times 2b.$$

Cette expression tend vers 0 en 0 quand les deux fractions restantes le font. On pose donc $b = 0$ et $1-4a = 0$ c'est à dire $a = \frac{1}{4}$.
On a maintenant $y(t) - \frac{x(t)}{4} = -\frac{t^4}{4} + t^2 + t$ qui tend bien vers 0 quand t tend vers 0.

(c) En étudiant le signe de $t \mapsto y(t) - ax(t)^2 - bx(t)$, préciser la position de $\mathcal{P}$ par rapport à Γ.
On montrera que $\mathcal{P}$ et Γ n'ont qu'un seul point en commun sans chercher à exprimer les coordonnées exacte de ce point.

Correction On a $y(t) - \frac{x(t)}{4} = \frac{t}{4}(-t^3+4t+4)$. On pose $g : t \mapsto -t^3+4t+4$ et on va étudier g.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = -3t^2+4$. On en déduit les variations de g :

t	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-\frac{2}{\sqrt{3}})$	$\nearrow$	$g(\frac{2}{\sqrt{3}})$	$\searrow$	$-\infty$

On nous demande de montrer que g ne n'annule qu'une fois, on va donc montrer que $g(-\frac{2}{\sqrt{3}}) > 0$. On a

$$g(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = +\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + 4 = \frac{12\sqrt{3}+8-24}{3\sqrt{3}}$$

Or $12\sqrt{3} > 16$ car $3 \times 144 = 432 > 256 = 16^2$ et on a bien $g(-\frac{2}{\sqrt{3}}) > 0$.
De plus, g est strictement décroissante sur $[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$ et est donc bijective sur cet intervalle. En particulier elle s'annule exactement une fois en un réel noté α. On peut maintenant dresser le tableau de signes de $y - \frac{x^2}{4}$:

t	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$y(t) - \frac{x(t)^2}{4}$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi Γ est au dessous de la parabole en $t \to -\infty$ et au dessus en $t \to +\infty$.

7. Montrer que la courbe admet une tangente de pente $\frac{4}{3}$ au point de paramètre -1.

Correction On a un point singulier en $t = -1$. Soit $t \neq 0$. On a $f''(t) = \begin{pmatrix} 2-\frac{4}{t^3} \\ 2+\frac{6}{t^4} \end{pmatrix}$ et $f''(-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ qui est non nul donc dirige la tangente.
La pente de la tangente est donc de $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

8. Etude des éventuels points doubles.
   Soient t, u dans le domaine de définition de f tels que $t < u$.
   (a) On pose $S = t + u$ et $P = tu$.
   Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi $\begin{cases} SP = -2 \\ S(P^2 - 1) = 0 \end{cases}$.
   μ-remarque : on a noté comme d'habitude $M(t)$ le point de la courbe de paramètre t.

   Correction On a

$$M(t) = M(u) \iff \begin{cases} x(t) = x(u) \\ y(t) = y(u) \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - 2t^{-1} = u^2 - 2u^{-1} \\ t^2 + t^{-2} = u^2 - u^{-2} \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - u^2 = 2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right) \\ t^2 - u^2 = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (t-u)(t+u) = 2\frac{u-t}{tu} \\ (t-u)(t+u) = \frac{t^2-u^2}{t^2u^2} \end{cases} \iff \begin{cases} (t+u)tu = -2 \\ (t+u) = \frac{t+u}{(tu)^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} SP = -2 \\ SP^2 = S \end{cases} \iff \begin{cases} SP = -2 \\ S(P^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

   On a utilisé le fait que $t \neq u$ et qu'on peut donc simplifier par $t - u$.

   (b) Montrer que $M(t) = M(u)$ ssi t et u sont racines de l'équation polynomiale $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ d'inconnue α. On montrera au passage que $S \neq 0$.

   Correction On repart du système précédent. On remarque que la première équation $SP = -2$ interdit à S et P d'être nul. La deuxième équation devient donc $P^2 = 1$ c'est à dire $P = \pm 1$. On résout donc deux systèmes.

   — Si $P = 1$ on résout $\begin{cases} SP = -2 \\ P = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} S = -2 \\ P = 1 \end{cases} \iff$ t et u sont solutions de l'équation $\alpha^2 - S\alpha + P = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$. Or cette équation admet une racine double et on en déduit que $t = u$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

   — On est donc forcément dans le cas $P = -1$ et $S = 2$. Le système devient $M(t) = M(u)$ ssi t et u sont solutions de $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$.

   (c) En déduire qu'il existe un unique point double dont on calculera les coordonnées.

   Correction On a donc $t = 1 - \sqrt{2}$ et $u = 1 + \sqrt{2}$. On calcule les coordonnées de $M(u)$ (qui sont les même que celles de $M(t)$).

$$\begin{cases} x(u) = u^2 - \frac{2}{u} = (1+\sqrt{2})^2 - \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} - \frac{2(1-\sqrt{2})}{-1} = 5 \\ y(u) = u^2 + \frac{1}{u^2} = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{3-2\sqrt{2}}{1} = 6 \end{cases}$$

9. Tracer sur un même schéma la droite d'équation $y = x$ ainsi que la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{4}$. On prendra une échelle permettant de placer les points dont les abscisses sont dans $[-10, 10]$ et les ordonnées dans $[0, 20]$.
10. Tracer Γ sur la figure précédente [1] !
    On donne, en cas de besoin, les valeurs approchées suivantes : $2^{\frac{1}{3}} \approx 1,3$, $2^{\frac{2}{3}} \approx 1,6$ et $2^{-\frac{2}{3}} \approx 0,6$.

1. Où au moins, placer les points et tangentes que vous avez étudié !