Développements limités

Antoine Louatron

Table des matières

I DL **3**
I.1 Puissances et développements limités . . . 3
I.2 Utilité . . . 3

II Taylor-Young **3**
II.1 Fonctions de classe n . . . 3
II.2 Lien dérivation-DL . . . 4

III Pratique du DL **6**
III.1 Exemples fondamentaux . . . 6
III.2 Opérations sur les DL . . . 6

L'idée de ce chapitre est d'essayer de rammener la comparaison de deux fonctions à des comparaisons de puissances, que l'on connait bien grâce au chapitre précédent.

I DL

I.1 Puissances et développements limités

I.1.1 Comparaisons usuelles

En 0, comparer $1, x, x^2, x^3$ puis x^α à x^β.

Soit $a \in \mathbb{R}$. En a, même question avec $1, (x-a), (x-a)^2, \dots$.

I.1.2 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

L'égalité $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$ est le développement limité de f en a à l'ordre n. Les nombres α_i pour $i \in [\![0, n]\!]$ sont les coefficients de ce développement limité.

On le notera dans ce cours DL_n en a.

I.1.3 Remarque

Qu'est α_0 pour la fonction f en a ? Ainsi α_0 est unique. On peut initialiser ainsi une récurrence (sur l'ordre du développement limité d'une fonction qualconque) dont l'hérédité consiste à considérer $\frac{f(x)-\alpha_0}{x-a}$.

I.1.4 Ré-écriture

On considère le même développement limité qu'à la définition, et pour montrer que x est proche de a on écrit $x = a + \varepsilon$.

Alors $\varepsilon \to 0$ et on obtient $f(a+\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \cdots + \alpha_n\varepsilon^n + o_0(\varepsilon^n)$. et on se retouve avec une limite en 0.

D'une manière générale, on peut toujours se rammener à une variable qui tend vers 0 par changement de variable.

I.1.5 Exemple

Quelle est la fonction dont le développement limité en 0 à l'ordre n possède seulement des 1 comme coefficients ?

I.2 Utilité

I.2.1 Dérivabilité

On peux maintenant reformuler ainsi la définition de la dérivabilité en a. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{I}$.

f est dérivable en a ssi f admet un DL à l'ordre 1 en a et alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$.

I.2.2 Equivalent

D'après le chapitre précédent, l'équivalent en a d'une fonction qui admet un DL en a est le premier terme non nul de ce DL.

I.2.3 Exemple

Donner un équivalent de $\frac{1}{1+x^2} - 1$.

I.2.4 Exemple

Position relatives de la courbe de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

II Taylor-Young

II.1 Fonctions de classe n

II.1.1 Notation

L'ensemble des fonctions définies sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E.

II.1.2 Définition

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.

- *on dit que f est de classe 0 ou $\mathcal{C}^0$ (ou encore $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$) ssi f est continue sur I.*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul, on dit que $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ ssi f est dérivable sur I et f' est de classe $n-1$.*

On utilise les mêmes terminologies et notation même si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II.1.3 Traduction

$f \in \mathcal{C}^n$ ssi on peut dériver f n fois consécutivement et sa dérivée $n-ime$ notée $f^{(n)}$ est continue (mais plus forcément dérivable).

II.1.4 Exemple

Les fonctions polynomiales et exp sont clairement $\mathcal{C}^\infty$.

II.1.5 Exemple

Les solutions de $y''+y=0$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.1.6 Arguments de classe

On admet provisoirement que les théorèmes de dérivabilité par opération (somme, produit, quotient dont...) se généralisent en remplaçant “dérivable” par “de classe $\mathcal{C}^k$” où k est un entier ou éventuellement le symbole ∞.

II.1.7 Exemple

Calcul des dérivées k-ièmes de

1. exp
2. ch et sh
3. sin et cos.
4. $x \mapsto \ln(1+x)$ (avec rappel du pourquoi $1+x$).
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$.

II.2 Lien dérivation-DL

II.2.1 Lemme

Soit $f : I \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ dérivable.

Si f' admet un DL à l'ordre n en 0 alors f admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 qui s'obtient en calculant terme à terme une primitive du DL de f' et en choisissant comme constante la valeur $f(0)$.

II.2.2 Exemple

DL à l'ordre n de arctan, $\ln(1+x)$.

II.2.3 Théorème (Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$. Alors f possède un DL à l'ordre n en a sous la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_a((x-a)^n)$$

Preuve.

On raisonne par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n : \forall f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \ f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

— Initialisation : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors on a vu que $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. C'est la formule de Taylor-Young pour $n=0$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors $f' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ donc $f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$ par hypothèse de récurrence.
Mais alors, d'après le lemme on a

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!(k+1)}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

C'est le résultat cherché moyenant un changement d'indice pour ramener l'ensemble d'indice à $[\![1, n+1]\!]$.

— Conclusion : la formule de Taylor-Young est vraie ! ∎

II.2.4 Exponentielle

$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\exp^{(k)} = \exp$.

II.2.5 sin et cos

$\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} o(x^{2n+1})$.

Il suffit de dériver 4 fois sin pour retomber sur sin. Donc les coefficients du DL sont périodiques. On calcul les 4 premiers. De même pour cos : $\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

II.2.6 ch et sh

On procède de même et on obtient

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$$
$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2})$$

II.2.7 Puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et on peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

II.2.8 Résumé

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a au voisinage de 0 les DL usuels suivant (à connaître !)

1. Exponentielle, logarithme, puissances

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n).$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

2. Trigonométrie circulaire

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2k+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} o_0(x^{2n+1}).$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n}).$$

3. Trigonométrie hyperbolique.

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2k+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} o_0(x^{2n+1}).$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n}).$$

III Pratique du DL

III.1 Exemples fondamentaux

III.1.1 Exemple
Rappel du DL d'arctangente.

III.1.2 Exemple
Calculons les $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $DL_6(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

III.1.3 Exemple
On peut maintenant donner des DL de arcsin et arccos en intégrant terme à terme.

III.1.4 Ordre d'un DL
Pour commencer quelques rappels :

— L'ordre d'un DL est la puissance qui apparaît dans le o et pas la dernière puissance de x à coefficent non nul.

— On peut toujours réduire l'ordre d'un DL connu en ne notant pas les termes de degré strictement supérieur à l'ordre.

Pour prévoir l'ordre d'un DL après une opération (multiplication, changement de variable) on ne s'intéresse qu'aux opérations sur les o. En particulier tout DL qui se factorise par x (ou $(x-a)$ dans le cas général) devra l'être

III.1.5 Exemple
Donnons un DL à l'ordre 2 en 0 de $\sin(x)\exp(x)$. On a $\sin(x) = x(1+o_0(x))$ et $\exp(x) = 1+x+o_0(x)$.

il suffit de considérer des $o_0(x)$ car nous aurons un x en facteur après développement et donc notre $o_0(x)$ deviendra $o_0(x^2)$.

La preuve : $x(1+o_0(x)) \times (1+x+o_0(x)) = x(1+x+o_0(x)) = x+x^2+o_0(x^2)$

III.2 Opérations sur les DL

Pour abréger cette partie, on note $DL_n(a)$ l'expression développement limité à l'ordre n en a.

III.2.1 Proposition
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I, n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent des $DL_n(a)$: $f \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$ et $g \underset{a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n)$ (pour P, Q des fonctions polynomiales de degré au maximum n).

1. *Alors $f+g$ admet un $DL_n(a)$ et $f+g = P(x-a) + Q(x-a) + o_a((x-a)^n)$*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ λf admet un $DL_n(a)$ et $\lambda f = \lambda P(x-a) + o_a((x-a)^n)$*
3. *fg admet un $DL_n(a)$ et $fg(x) = R(x-a) + o_a((x-a)^n)$ où R est le polynôme PQ tronqué au degré n.*

III.2.2 Exemple
Calculer un $DL_3(0)$ de $\cos x \sin x$. On remarque qu'on ne développe pas tous les termes, mais seulement qui donnent une puissance $\leqslant 3$.

III.2.3 Corollaire (Puissances entières)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(a)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ f^p aussi.

III.2.4 Exemple
Calculons un $DL_2(0)$ de $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^3 = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + o_0(x^2)$. On commence par calculer le DL qu'on doit mettre à la puissance, puis on calcule les puissances successives dans un tableau.

III.2.5 Composition
Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettent des $DL_n(0)$ et que $f(0) = 0$ alors on pourra calculer un $DL_n(0)$ de $g \circ f$ d'après les règles de calcul sur les o.

III.2.6 Exemple
Calculer un $DL_3(0)$ de ln(cos).

III.2.7 Inverse
On peut maintenant calculer un DL de $\frac{1}{f}$ à condition que f ne s'annule pas en 0. Il suffit de se ramener à une expression de la forme $\frac{1}{1 \pm u}$ où $u \underset{0}{\to} 0$.

Cette technique permet de calculer des quotients.

III.2.8 Exemple à retenir

On va calculer un $DL(0)$ à l'ordre 5 de tangente : $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^6)$