

## I Géométrie du plan et de l'espace

### Exercice 1

Soit  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi]$  et  $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$  une droite du plan.

1. Donner une interprétation de  $\theta$ . Pourquoi le choisir dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ?
2. Calculer la matrice dans la base canonique de  $s$ , la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$  un plan de l'espace et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ . Donner les coordonnées du

projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur  $\mathcal{P}$  ainsi que celles de son symétrique orthogonal par rapport à  $\mathcal{P}$ .

On note  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{P}$ . Montrer que la matrice de  $s$  dans la base canonique est symétrique et que ses colonnes forment une base orthonormée indirecte de l'espace.

### Exercice 3

1. Soient  $A, B$  deux points de l'espace. Décrire  $E = \{M \in \mathbb{R}^3, d(A, M) = d(B, M)\}$ .
2. Soient  $A, B, C, D$  4 points non coplanaires de l'espace. Montrer qu'il existe un unique point  $\Omega$  à égale distance de  $A, B, C, D$ .

### Exercice 4

Dans  $\mathbb{R}^3$  munit du produit scalaire canonique, on considère le plan  $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ .

1. Construire  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $(u, v)$  soit une base orthonormée de  $\mathcal{P}$ .
2. On considère  $p$  et  $s$ , le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{P}$  et la réflexion de plan  $\mathcal{P}$  respectivement. Donner la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $p$  et  $s$ .
3. En déduire une expression sous forme de produit matriciel des matrices canoniquement associées à  $s$  et  $p$ .

## II Exercices d'application

### Exercice 5

Montrer que

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi \sin x \cdot P(x) \cdot Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . En est-il de même de

$$\psi : (P|Q) \mapsto \int_0^\pi \cos x \cdot P(x) \cdot Q(x) dx ?$$

### Exercice 6

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on considère

$$v = (0, 3, 1, -1) \text{ et } w = (1, 2, -1, 1). \text{ Soit } F = \text{Vect}(v, w)$$

Déterminer une base orthonormale de  $F^\perp$  puis une base orthonormale adaptée à  $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 7

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}^*$ , des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

### Exercice 8

1. Montrer que l'application  $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$  définit un produit scalaire sur

$$\mathbb{R}_n[X].$$

2. Pour  $n = 2$ , construire une base orthonormale à partir de la base  $(1, X, X^2)$ .

### Exercice 9

Montrer que  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  est un produit scalaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. La base canonique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est-elle orthonormale vis-à-vis de ce produit scalaire ?
2. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et l'ensemble des matrices antisymétriques  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 10

Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à  $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

### Exercice 11

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $E$  un espace euclidien. Soit  $a \in E$  un vecteur unitaire. On pose  $\varphi_\alpha :$

$$\begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \alpha \langle a|x \rangle a \end{cases}.$$

1. Vérifier que  $\varphi_\alpha$  est linéaire et donner ses éléments propres.
2. Vérifier que pour  $x, y \in E, \langle \varphi_\alpha(x)|y \rangle = \langle x|\varphi_\alpha(y) \rangle$ . Traduire ceci en terme de matrices dans une base orthonormée de  $E$ .
3. Peut-on avoir  $\varphi_\alpha \in O(E)$  ? Caractériser géométriquement  $\varphi_\alpha$  dans ce cas.

### III Exercices d'approfondissement

#### Exercice 12

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  rapporté à une base orthonormée  $\mathcal{B}$ , et  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de  $E$ .

1. Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur  $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ , est  $U^t U$ , où  $U$  est la matrice colonne des coordonnées de  $\vec{u}$  relativement à  $\mathcal{B}$ .
2. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $\mathcal{P} : x + y + z = 0$  de l'espace euclidien usuel  $\mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique.

#### Exercice 13

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, \pi]$ . On le munit du produit scalaire

$$(f | g) = \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que la famille  $(\cos, \sin)$  est une famille libre de  $E$ .
2. Construire une orthonormalisée de cette famille par la méthode de Schmidt.
3. Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a \cos t + b \sin t - t)^2 dt$ .

#### Exercice 14

Calculer  $m = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$ .

INDICATION : On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$  et on pourra considérer

l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$  et l'application  $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$ .

#### Exercice 15

Soient  $U$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  et  $A = I_n - 2U^t U$ .

Montrer que  $A$  est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

#### Exercice 16

Soit  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3, et  $\vec{p}$  un vecteur unitaire de  $E$ . Soit

$$f : E \rightarrow E, \vec{u} \mapsto \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u}).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
3. Déterminer les éléments propres de  $f$ .
4. Interpréter géométriquement  $f$ .

#### Exercice 17

Soit  $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice orthogonale. Montrer que  $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$ .

(on pourra écrire  $a_{ij}$  comme produit scalaire)

#### Exercice 18

Soit  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale  $O$  et une unique matrice triangulaire supérieure  $T$  dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que :  $M = OT$

### Matrices symétriques

#### Exercice 19

Soit  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$  de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ .

#### Exercice 20

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $B = A^t A - {}^t A A$  ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que  $B = 0$ .

#### Exercice 21

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B = A^3$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $A = P(B)$ .

#### Exercice 22

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  ${}^t A A$  est diagonalisable.  
On suppose pour le reste de l'exercice que  $A$  est inversible telle que

$${}^t A = A^{-1} + I_n.$$

2. En déduire que  $A$  est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de  $A$ , c'est-à-dire un polynôme  $P$  tel que  $P(A) = 0$ .
4. On suppose que  $A$  n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de  $A$ .