Devoir maison 12

A rendre le au plus tard le 02/02/2021.

Exercice 1
Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $x > 0$ un réel, on pose

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$$

1. Soit $a > 0$. Montrer que G_n est dérivable sur $[a, +\infty[$ puis dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $G_n(1)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(1)$.
3. ($\star$) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on a

$$G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(On pourra utiliser des intégrations par parties.)

Indications

1. Quel théorème et chapitre faut-il utiliser ?
2.
3. On pourra montrer, par intégration par parties successives que, pour $k < n$ on a

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1)}{n^k x(x+1)\dots(x+(k-1))}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} t^{x-1+k}\mathrm{d}t$$

On fera attention à l'éventuelle borne ouverte (pour la première intégration par parties), puis on expliquera pour quoi on doit avoir $k < n$ dans le calcul.
Conclure ensuite.