Espaces préhilbertiens et euclidiens

- Produit scalaire dans un espace vectoriel : définition. Exemples dans $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{C}([a,b,\mathbb{R}]), \mathbb{R}[X]$.
- Norme. Lien avec le produit scalaire : $\|u+v\|^2$ et identité de polarisation. Inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
- Orthogonalité : liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore.
- Bases orthonormées : calcul des coordonnées par produit scalaire. Procédé de Gram-Schmidt.
- Espaces orthogonaux, supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie.
- Projection et symétrie orthogonales.
- Isométries en dimension finie : conservation de la norme, du produit scalaire, image d'une base orthonormée.
- Matrices orthogonales : interprétation en tant que matrice d'isométrie, de matrice de passage d'une BON à un BON.
- Matrices symétriques réelles : les espaces propres sont orthogonaux deux à deux, théorème spectral.

Révisions

- Donner les solutions de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ où a est continue sur l'intervalle I.
- Donner, avec son domaine de validité, le développement en série entière d'une fonction usuelle (puissance, inverse, ln, exp, trigonométrique circulaire ou hyperbolique).
- Donner un vecteur normal d'un plan de $\mathbb{R}^3$ ou d'une droite de $\mathbb{R}^2$ en fonction d'une équation (donner la forme d'une telle équation, puis un vecteur qui s'en déduit).

Questions de cours

1. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ considéré comme espace des colonnes de taille n.
2. Déterminer une base puis un base orthonormale d'un plan de $\mathbb{R}^3$ (donné par une équation) en utilisant le procédé de Gram-Schimdt.
3. Montrer que pour $A \in \S_n(\mathbb{R})$, deux espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.