Table des matières

I Isométries

I.1 Groupe orthogonal en dimension 2

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique.

I.1.1 Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

I.1.2 Interprétation géométrique

1. Donner l'image d'un vecteur unitaire par R_θ. C'est la matrice de la rotation d'angle θ
2. On note $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$. Calculer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

I.1.3 Proposition (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.
1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

Preuve.
— On commence par remarquer que toutes les matrices R_θ sont clairement dans $SO_2(\mathbb{R})$.
Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. Alors $\begin{cases} a^2 + b^2 & = 1 \\ c^2 + d^2 & = 1 \\ ad - bc & = 1 \end{cases}$
On peut donc écrire, d'après les deux première équations $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$ et $c = \cos\psi, d = \sin\psi$. Maintenant la condition sur le déterminant est

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = 1 \text{ ie. } \cos(\varphi + \psi) = 1$$

On en déduit que $\varphi + \psi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\sin\psi = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ et $\cos\psi = \cos\varphi$. CQFD.
— On peut faire la même démonstration avec $\det M = -1$ et trouver le résultat annoncé. ■

I.1.4 Traduction sur les isométries

Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$ une isométrie du plan. Alors f est une rotation ssi $\det(f) = 1$ et f est une réflexion ssi $\det(f) = -1$.

Dans le cas d'une rotation, il suffit de déterminer l'image d'un vecteur de base pour en déduire l'angle. pour une réflexion, on cherche la droite de point fixe pour la caractériser géométriquement.

I.1.5 Exemple
Calculer $R_\theta S_\varphi$. On pourra d'abord remarquer que c'est une matrice d'isométrie négative.

I.1.6 Composition de deux réflexions

La composée de deux réflexion est une rotation du plan. Il reste à déterminer l'angle.

I.1.7 Valeurs propres

1. Les matrices de rotations $R_\theta \neq I_2$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Leurs valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$.
2. Les réflexions sont diagonalisables, de valeurs propres 1 et -1 (multiplicité 1).

I.2 Groupe orthogonal en dimension 3

On se place maintenant dans $E = \mathbb{R}^3$ espace euclidien de dimension 3, et $\mathcal{B}_c$ est une base directe.

I.2.1 Définition
Si f est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \text{Vect}(u)$ orienté par le vecteur unitaire u, alors dans toute base orthonormée de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (le premier vecteur doit être u) on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante : $\text{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^{\perp}$, f est la rotation d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le "dessus" de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. Si on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

I.2.2 Proposition
Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Si f possède une valeur propre λ réelle, alors $\lambda = \pm 1$.

Preuve.
Soit $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.

Alors $\|f(x)\| = \|x\|$ car f est une isométrie. On a donc $\|\lambda x\| = \|x\|$ ou encore $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ Ainsi $|\lambda| = 1$ car x est non nul donc de norme non nulle.

Plus généralement, soit M la matrice dans une base orthonormée de f et $\lambda \in Sp(M)$ réelle ou non. Soit également un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ propre de M associé à λ.

Alors $\bar{X}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$ (car M est à coefficients réels) et on a ${}^t(A\bar{X})AX = \bar{\lambda}{}^t\bar{X}\lambda X = |\lambda|^2 {}^t\bar{X}X$.

Si on note $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix}$ alors ${}^t\bar{X}X = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$.

De plus, comme A est orthogonale, ${}^t(A\bar{X})AX = {}^t\bar{X}{}^tAAX = {}^t\bar{X}X$. Ainsi $\|\lambda^2\| = 1$ et λ est de module 1. ∎

I.2.3 Etude des valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. Comme 3 est impair, χ_f possède une racine réelle qui vaut forcément ± 1. Notons u un vecteur propre associé à $\lambda = \pm 1$.

Alors $P = \text{Vect}(u)^{\perp}$ est stable par f et $f_{|P}$ est une isométrie d'un plan vectoriel. Ainsi $f_{|P}$ est une rotation ou une réflexion. Si $f_{|P}$ est une réflexion, alors f est une symétrie orthogonale. Dans le cas où $f_{|P}$ est une rotation il y a plusieurs possibilités :

— Cas $\lambda = 1$. f est une rotation de l'espace.

— Cas $\lambda = -1$. f est la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion. L'axe de rotation est $\text{Vect}(u)$ et le plan de réflexion est P.
Dans une BOND $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (en prenant u de norme 1, c'est toujours possible), alors (v, w) est une base orthonormée de P et on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et le produit commute bien.

I.2.4 Théorème
Soit $f \in O(E)$ avec E de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

I.2.5 Etude d'une matrice orthogonale

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose $M \neq \pm I_3$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Si M est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale. Si $\text{tr}(M) = 1$ il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si $\text{tr}(M) = -1$ il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
   (a) Si $\det(M) = 1$, alors f est une rotation.
   (b) Si $\det(M) = -1$ alors $-M$ est une matrice de rotation d'axe $\text{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ. Alors f est la composée de la réflexion par rapport à $\text{Vect}(u)^{\perp}$ et de la rotation d'axe $\text{Vect}(u)$ et d'angle $\theta + \pi$.

I.2.6 Exemple

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. M est symétrique donc il s'agit d'une matrice de symétrie orthogonale. Comme $\text{tr}(M) = -1$, il s'agit d'une symétrie axiale.

On détermine l'axe comme ensemble des points fixes, ie comme noyau de $M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(M - I_3)X = 0$ donc M est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale d'axe Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I.2.7 Déterminer une rotation

Soit M une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$.

1. Etape 1 : déterminer l'axe. Il s'agit de l'ensemble des points fixes, ou encore de l'espace propre associé à la valeur propre 1. On fixe u de norme 1 directeur de l'axe.
2. Etape 2 : déterminer l'angle. On le note $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   On a déjà, $\mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on connaît $\cos(\theta)$ facilement. Il reste à trouver le signe de θ, ie le signe de $\sin(\theta)$.
   Fixons v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une BOND. Alors
   $$\det_{\mathcal{B}}(u, v, Mv) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$
   Si maintenant $X \in \mathbb{R}^3$ n'est pas sur l'axe de rotation, on écrit $X = au + X_P$ où X_P est non nul et orthogonal à u. Alors, dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, \frac{X_P}{\|X_P\|}, u \wedge \frac{X_P}{\|X_P\|})$, $\det_{\mathcal{B}'}(u, X, MX) = \det(u, X_P, MX_P) = \|X_P\|^2 \sin(\theta)$

I.2.8 Méthode

Pour déterminer l'axe D et l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ d'une rotation dans l'espace de matrice M dans la base canonique :

1. Trouver D comme noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Soit X un vecteur $X \notin D$. θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg(\det(u, X, MX)) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend pour X un vecteur de la base canonique.

I.2.9 Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation dont on précisera un axe dirigé et l'angle correspondant.

On a facilement $\det(M) = 1$ par deux échanges de colonnes. Clairement les colonnes de M forment une BON (qui est donc directe car $\det(M) > 0$).

L'ensemble des points fixes est $E_1(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on pose $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire qui dirige et oriente l'axe de rotation. L'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(M) = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. De plus, en posant $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas sur l'axe de rotation, $\sin(\theta)$ est du signe de $[u, v, Mv] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ par développement suivant la 3ème ligne. Finalement $\theta = \frac{\pi}{3}$.

II Coniques

II.1 Forme réduite

II.1.1 Définition

Une conique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

II.1.2 Exemple

Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

II.1.3 Définition

Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

— $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)

— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)

— $y^2 = 2px$ (parabole)

II.2 Tracés

II.2.1 Etude

Nous allons paramétrer chacune de ces coniques pour les tracer.

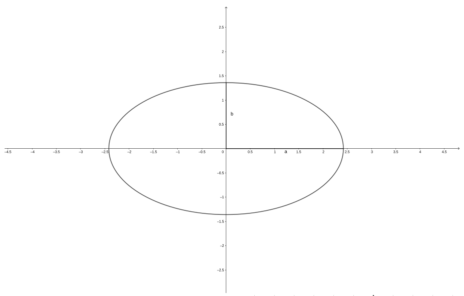
1. Une ellipse admet un paramétrage par $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ $\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases}$. On obtient un tracé de la forme : Ici $b = 1, a > b$. on observe deux axes de symétrie (et le centre O qui est centre de symétrie).

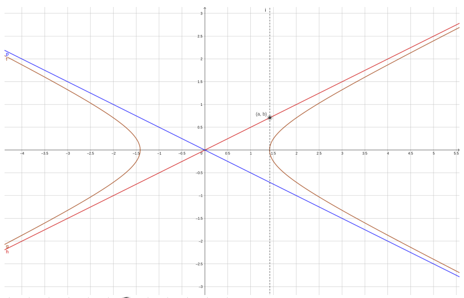
2. Une hyperbole est la réunion de deux arcs paramétrés : $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}(t) \\ y = b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$.

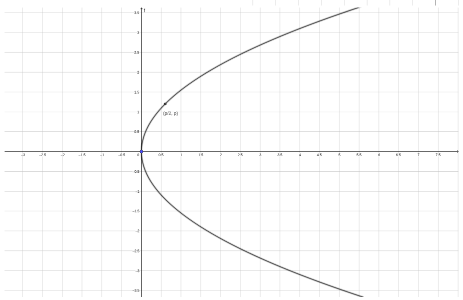
   Encore une fois on observe deux axes de symétries.

3. Un parabole se paramètre en $\exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$. Cette fois nous n'avons plus que l'axe (Ox) qui est axe de symétrie.

II.2.2 Tracés







II.3 Réduction d'une conique

II.3.1 Ecriture matricielle

Fixons les coefficients d'une équation de conique.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Alors ${}^tXAX = ax^2 + bxy + cy^2$. Ainsi en posant en plus $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff {}^tXAX + LX + f = 0$$

Le but est maintenant de diagonaliser A, ce qui fait disparaître le terme “rectangle” en xy.

D'après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l'équation n'a plus de terme en xy.

II.3.2 Après rotation

Comme A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons λ, μ ses valeurs propres. On suppose $\lambda \neq \mu$ (sinon, A était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons P la matrice de passage (qui diagonalise A).

Posons $X' = P^{-1}X = {}^tPX$ ie $X = PX'$, les coordonnées de X dans la nouvelle base.

${}^tXAX + LX + f = 0 \iff {}^t(PX')APX' + LPX' + f = 0 \iff {}^tX'DX' + (LP)X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ où $LP = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$.

1. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.

2. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on passe sous forme canonique (pour x et y, attention à bien factoriser par λ et μ) pour obtenir soit une équation d'ellipse soit une équation d'hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).

   Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l'ensemble vide ou deux droites sécantes.

II.3.3 Exemple

Tracer les coniques $3x^2 + 4xy + 3y^2 = \pm 1$, $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = \alpha$.

On obtient d'abord l'ensemble vide, puis une ellipse (rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$)

Pour la seconde, la matrice est $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(A_2) < 0$, on obtient une conique de type hyperbole. Les valeurs propres sont les racines de $X^2 + X - 6$ qui sont 2 et -3.

$E_2(A_2) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v})$.
L'équation dans le nouveau repère devient $2x'^2 - 3y'^2 + 2(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}) - 4\frac{-x'+2y'}{\sqrt{5}} = \alpha$ c'est à dire $2x'^2 - 3y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' = \alpha \iff 2(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{8}{5} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{3}{5} = \alpha \iff$ $2(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 - \frac{9}{10} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \alpha + 1$

On obtient une hyperbole ou la réunion de deux droites suivant la valeur de α.

II.3.4 Méthode

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser A, puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en x et y (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.

Index