

Exercice 1

On considère l'équation (E) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.

- Déterminer une solution polynomiale sur \mathbb{R} .
- Déterminer les solutions de (E) .

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

- Déterminer une fonction f solution de (E) sur \mathbb{R} et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, sous forme de fonction développable en série entière.
- Montrer que f ne s'annule pas.
- Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Résoudre $x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$ sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} puis sur \mathbb{R} .
(on pourra poser $z : x \mapsto x^2y(x)$)

Exercice 4

Vérifier que la fonction $x \rightarrow (\arcsin x)^2$ est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) = 2.$$

En déduire que cette fonction est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et déterminer son développement en série entière sur cet intervalle.

Exercice 5

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x^2(1 - x)y''(x) - x(1 + x)y'(x) + y(x) = 0.$$

Reconnaître les sommes des séries trouvées.

En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur \mathbb{R}^{-*} , $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Exercice 6

On considère le système différentiel (S) :
$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$$
, où x, y et z sont trois

fonctions de la variable t , de classe \mathcal{C}^1 .

- De quel type de système s'agit-il ? Montrer que les trajectoires (les fonctions $t \mapsto$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ solutions) de (S) sont contenues dans des plans parallèles.

- Déterminer la solution de (S) dont la trajectoire Γ passe par $M(1; 3; 3)$ à l'instant $t = 0$. Préciser une équation du plan qui la contient.

Exercice 7

Résoudre le système différentiel réel :
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$$
 et donner la solution au problème de Cauchy en $(0, (a, b, c))$.

Exercice 8

Résoudre (E) : $X'(t) = AX + B$ avec $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix}$.

Exercice 9

Résoudre le système différentiel réel :
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$
 en posant $z_1 = y_1 + y_2$ et $z_2 = y_1 - y_2$.