Géométrie du plan

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tout le chapitre, on rapport le plan à un Repère Orthornomé Direct de référence noté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Coordonnées

Bases du plan

I.1.1 Définition

1. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont dits colinéaires si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls tels que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = 0$. (On est obligé d'introduire deux nombres réels si on veut éviter une distinction de cas quand l'un des vecteur est nul).*

   On peut ainsi dire que l'un des deux est proportionnel à l'autre.
2. *Une* base *de $\mathcal{P}$ est la donnée d'un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ tel que tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit alors de manière unique sous la forme $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. x et y sont alors les* coordonnées (cartésiennes) *de $\vec{w}$*
3. *Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est dite orthonormée directe ssi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, et l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $(\vec{u}, \vec{v}) = +\frac{\pi}{2}$.*

Explication Dans toute la suite du cours on travaille dans une BOND de référence. On peut alors identifier l'ensemble des vecteurs du plan à $\mathbb{R}^2$: un vecteur est la donnée de deux coordonnées.

On peut également dans ce cas identifier l'ensemble des vecteurs à $\mathbb{C}$ via le passage aux affixes.

Remarque

En pratique l'unicité des coordonnées nous permet d'identifier chaque composantes de deux vecteurs égaux.
Si $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$, $\vec{u} = \vec{v}$ ssi $x = x'$ et $y = y'$.

I.1.3 Exemple

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Rappel

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda\vec{u} + mu\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$$

I.1.5 Théorème

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan ssi ils sont non colinéaires ssi la matrice dont ce sont les colonnes est inversible.

Preuve.

$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan ssi $\forall Y \in \mathbb{R}^2\ \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 Y = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

C'est notre définition.

Or $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ si M est la matrice dont la première colonne est $\vec{u}$ et la deuxième colonne est $\vec{v}$ (exprimés dans la base de référence)

Ainsi $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan ssi $\forall Y \in \mathbb{R}^2\ \exists! \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 Y = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ssi M est inversible.

Or M est inversible ssi la seule solution au système homogène associé est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que l'on traduit par $M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

De plus, $M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se récrit vectoriellement en $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

On vient de prouver que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. ∎

I.1.6 Exemple

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que ces vecteurs ne sont pas colinéaires et trouver les coordonnées de $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Repères

I.2.1 Définition

Un repère $\mathcal{R}$ *(cartésien) du plan est la donnée d'une base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *et d'un point* O. *Si* M *est un point du plan, il existe alors un unique couple de réel* (x, y) *tel que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. *Ce sont les* coordonnées (cartésiennes) *de* M *dans le repère* $\mathcal{R}$.

un tel repère est dit orthonormé direct ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *est une BOND.*

Notation

Si $A : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B : \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points, on peut considérer le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Les règles de calcul sur les colonnes permettent alors d'écrire $A + \overrightarrow{AB} = B$ ou encore $\overrightarrow{AB} = B - A$

D'une manière générale, si $\vec{u}$ est un vecteur on pourra écrire $A + \vec{u}$; Il s'agit de l'unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$.

I.2.3 Exemple

Le milieu de AB est l'unique point I tel que $I - A = B - I$. Traduire en terme de coordonnées.

I.2.4 Définition

Soit $\vec{u}$ *un vecteur du plan de coordonnées* (x, y), *on appelle* norme *de* $\vec{u}$ *le réel*

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soient A *et* B *deux points du plan, de coordonnées* (x_A, y_A) *et* (x_B, y_B) *respectivement (dans* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *repère orthonormé). On appelle* distance *de* A *à* B *le nombre*

$$d(A, B) = AB = \|AB\|$$

Remarques

1. Ainsi $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ est la distance entre A et B.
2. La définition de distance entre deux points dans le repère $\mathcal{R}$ est directement tirée du théorème de Pythagore.

I.2.6 Théorème

Soient A, B, C *trois points du plan, et* $\vec{u}, \vec{v}$ *deux vecteurs.*

1. *La distance entre deux points (tout comme la norme d'un vecteur) ne dépend pas du choix du repère orthonormal.*
2. $AC \leqslant AB + BC$ *et* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. *Ces distances (resp. normes) sont égales ssi* A, B, C *sont alignés dans cet ordre (resp.* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires de même sens)*

Preuve.
Voir le cours sur les complexes !

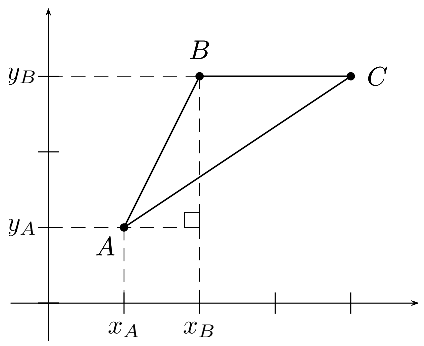


FIGURE 1 – Distance et inégalité triangulaire

Coordonnées polaires

Distance et angle

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). On suppose que $M \neq O$. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance entre M et O. On remarque alors que

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

On sait alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π) tel que $\frac{x}{r} = \cos\theta$ et $\frac{y}{r} = \sin\theta$. On voit donc qu'on a l'identité

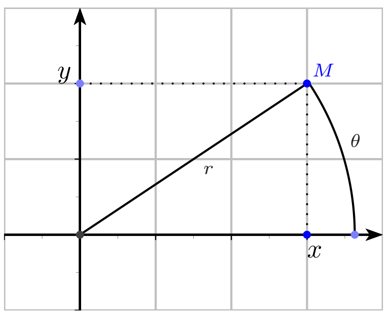
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\theta}$$

C'est l'analogue du passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un complexe.

I.3.2 Définition
Soit M un point du plan repéré par un ROND. Tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\theta}$ est un couple de coordonnées polaires *de M. On vient de voir que*

1. *Les coordonnées polaires de O sont les couples $(0, \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $M \neq O$ alors, on note (r, θ) un couple de coordonnées polaires. Alors*

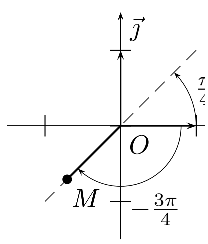
$$r = OM \text{ et } \theta \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \mod 2\pi \text{ ou alors } r = -OM \text{ et } \theta \equiv \pi + (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \mod 2\pi$$



I.3.3 Proposition
Il y a unicité des coordonnées polaires si on impose $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Preuve.
"Unicité" de la forme trigonométrique d'un nombre complexe. ■

Remarques



Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires, contrairement aux coordonnées cartésiennes. On dira donc **UN** couple de coordonnées polaires.

On se méfiera particulièrement des coordonnées polaires où $r < 0$.

Par exemple ici on a pris $r = -1$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Un autre couple de coordonnées polaires est $(1, -\frac{3\pi}{4})$ ou encore $(1, \frac{5\pi}{4})$.

On préférera souvent travailler avec des $r \geqslant 0$. On peut ainsi interpréter r comme le rayon du cercle de centre O sur lequel se trouve M.

On obtient également une forme trigonométrique de z, si on note z l'affixe de M.

I.3.5 Exemple

1. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que leur coordonnées polaires vérifient $\theta = \theta_0$ fixé dans $\mathbb{R}$.
2. Décrire l'ensemble d'équation polaire $r = R > 0$.

I.3.6 Proposition (Changement de coordonnées)
Soit M un point du plan distinct de O, de coordonnées cartésiennes (x, y) et soit (r, θ) des coordonnées polaires de M. Alors

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta$$

Réciproquement on a

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \theta \equiv \arccos\frac{x}{r} \mod 2\pi \text{ si } y \leqslant 0 \text{ et } \theta \equiv -\arccos\frac{x}{r} \mod 2\pi \text{ sinon}$$

Preuve.
C'est immédiat pour la première partie. Pour la deuxième partie se reporter au cours sur les complexes, et faire un dessin ! ∎

Remarque
On peut exprimer θ de différentes manières, mais il faut toujours distinguer des cas. Par exemple

$$\theta \equiv \arcsin\frac{y}{r} \mod 2\pi \text{ si } x \leqslant 0 \text{ et } \theta \equiv \pi - \arcsin\frac{y}{r} \mod 2\pi \text{ sinon}$$

I.3.8 Exercice
Trouver des formules pour θ faisant intervenir arctan.

Opérations sur les vecteurs

Rappels sur les complexes

Angles entre 2 vecteurs
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixes respectives u et v.
Alors l'argument de $\overline{u}v$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
De plus, $\overline{u}v = \|u\|\|v\|e^{i\theta}$ où θ est cet angle.

Colinéarité, orthogonalité
Avec les mêmes notation, sans supposer $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \overline{u}v \in i\mathbb{R} \iff \Re(\overline{u}v) = 0$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont olinéaires } \iff \overline{u}v \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(\overline{u}v) = 0$$

Produit scalaire

II.2.1 Définition
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le réel*

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarques

1. On est obligé de traiter le cas où au moins un vecteur est nul à part car l'angle d'un vecteur avec le vecteur nul n'existe pas.
2. On peut interpréter le produit scalaire comme une projection orthogonale : notons $p(\vec{v})$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite dirigée par $\vec{u}$. Alors

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|p(\vec{v})\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } p(\vec{v}) \text{ sont colinéaires de même sens} \\ -\|\vec{u}\|\|p(\vec{v})\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } p(\vec{v}) \text{ sont colinéaires de sens opposés} \end{cases}$$

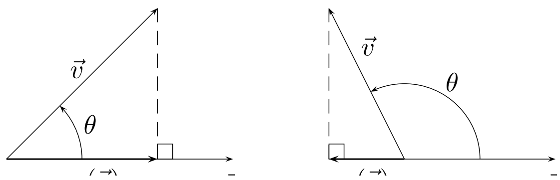


Figure 2 – Interprétation du produit scalaire

3. On en déduit $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}|\vec{u})$

II.2.3 Exercice
Déterminer le projeté orthogonal du point $M = (2, 5)$ sur la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

II.2.4 Théorème (Propriétés du produit scalaire)
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

2. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
3. *Si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors*

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

   De plus cette formule est invariante par changement de RON. C'est à dire que le lien entre produit scalaire et coordonnées ne dépend pas du RON choisi.
4. *Propriétés de l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}\right.$:
   (a) ***Symétrie*** : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{P}\ \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
   (b) ***Bilinéarité*** : *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{P}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \textit{Linéarité à droite} & \vec{u}.(\lambda\vec{v}) & = & \lambda(\vec{u}.\vec{v}) \text{ et } \vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} \\ \textit{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} & = & \lambda\vec{u}.\vec{w} + \mu\vec{v}.\vec{w} \end{array}\right.$$

Preuve.
1. Il s'agt d'une traduction de la propriété énoncé sur les complexes.
2. $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ sont les affixes de ces vecteurs.
   Alors $\overline{u}v = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$...
3. On pose des coordonnées pour les 3 vecteurs. Ces propriétés sont évidentes à démontrer grâce à la formule précédente.
   Remarque : On a par définition des coordonnées $\vec{u} = u\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Ainsi

$$\vec{u}.\vec{v} = x\vec{\imath}.(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) + y\vec{\jmath}.(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) = xx' + yy'.$$

■

Remarque
On retrouve bien $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 = \vec{u}.\vec{u}$.

II.2.6 Exercice
Trouver deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Lequel est directement orthogonal ?

II.2.7 Corollaire
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan. Alors pour tout point M et vecteur $\vec{w}$ on a $M : \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM}.\vec{u} \\ \overrightarrow{OM}.\vec{v} \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{w}.\vec{u} \\ \vec{w}.\vec{v} \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{R}$).

Preuve.
C'est immédiat d'après le théorème précédent, en remarquant que $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$. ■

Déterminant

II.3.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant *de $(\vec{u},\vec{v})$ et on note* $\det(\vec{u},\vec{v})$ *le réel*

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) & \textit{si } \vec{u}\neq\vec{0} \textit{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Remarques

1. On remarque que $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$.
2. On peut interpréter la valeur absolue du déterminant comme une aire : $|\det(\vec{u},\vec{v})|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   En effet, $\|v\|\|\sin(\vec{u},\vec{v})|$ est la hauteur du parallélogramme considéré, et l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa "base" par sa "hauteur".

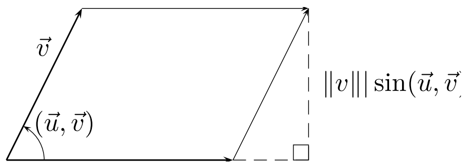


FIGURE 3 – Interprétation du déterminant

3. On peut également calculer une aire de triangle : l'aire de ABC est $\frac{|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}{2}$.

II.3.3 Théorème

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors*

$$\vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ sont colinéaires} \iff \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$$

   (on dit que le déterminant est une application alternée)
2. *Trois points A, B, C sont alignés ssi* $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}) = 0$.
3. *Si $\vec{u} = (x,y)$ et $\vec{v} = (x',y')$ alors*
$$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'$$
4. *Propriétés de l'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & \det(\vec{u},\vec{v}) \end{array} \right.$ *:*
   (a) ***Anti-symétrie*** $\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$
   (b) ***Bilinéarité***

$$\left\{ \begin{array}{lccc} \textit{Linéarité à droite} & \det(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) & = & \lambda\det(\vec{u},\vec{v})+\mu\det(\vec{u},\vec{w}) \\ \textit{Linéarité à gauche} & \det(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\vec{w}) & = & \lambda\det(\vec{u},\vec{w})+\mu\det(\vec{v},\vec{w}) \end{array} \right.$$

Preuve.

1. C'est immédiat d'après la définition.
2. C'est juste une reformulation du fait précédent.
3. Calcul déjà fait pour le produit scalaire.
4. Il ne nous reste plus que la bilinéarité à prouver. L'antisymétrie nous permet, encore une fois, de ne prouver que la linéarité d'un côté. Un calcul similaire à celui du II.2.4 nous la donne sans problème. ∎

Remarques

1. On note souvent $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le déterminant de (x,y) et (x',y'). On retient la formule $\det(\vec{u},\vec{v})$ via le dessin
2. si on note u et v les affixes dans un ROND de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Im}(\overline{u}v)$

II.3.5 Exercice

Calculer l'aire du triangle ABC où $A = (2,3)$, $B = 1,1$ et $C = -1,4$.

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy$$

II.3.6 Proposition
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan est directe ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0$.

Preuve.
en effet, une base est directe ssi l'angle entre ($\vec{u}$ et $\vec{v}$) est dans $]0, \pi[$, c'est à dire ssi $\sin(\vec{u}, \vec{v}) > 0$. ■

Déterminant d'une matrice
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Son déterminant est le déterminant de la famille de ses colonnes.
On a $\det(M) = \det({}^tM)$ et M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$.

Equations géométriques

Généralités

Liens entre les coordonnées
Dans notre ROND de référence, tout point du plan possède un unique couple de coordonnées.
Donner l'équation d'un ensemble c'est donner une équation à 2 inconnues x et y. L'ensemble décrit est alors l'ensemble des points $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan dont les coordonnées vérifient cette relation.

III.1.2 Exemple
Dessiner les ensemble d'équation

1. $y = x$;
2. $y = \ln(x)$.
3. $x^2 + y^2 = 1$.

Droites

III.2.1 Définition
Une droite $\mathcal{D}$ du plan est la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$.
La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points B tels que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$ ou encore $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} \iff B - A = \lambda\vec{u} \iff B = A + \lambda\vec{u}$.
On note donc $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$. Ceci est la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{D}$ passe par l'origine du repère, on dira que $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle et on note $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.
Dans tous les cas, $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ *est appelée la direction de $\mathcal{D}$.*

Remarque
Combien de vecteurs directeurs différents possède une même droite $\mathcal{D}$? Liens entre eux ?

Remarque
Si A, B sont deux points distincts du plan, alors $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et donc $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ est une droite passant par A et B. C'est même la seule droite qui passe par A et B d'après la remarque précédente.

Ecriture paramétrique
Soit $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $A : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. On a alors $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\ M = A + \lambda\vec{u} \iff \begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \end{cases}$. Ce système est l'écriture paramétrique des points de $\mathcal{D}$ ou abusivement l'écriture paramétrique de $\mathcal{D}$.

III.2.5 Proposition
La droite $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ *possède une équation de la forme* $-bx + ay + c = 0$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{D}$ *est une droite vectorielle ssi* $c = 0$.

Preuve.
On pose $c = bx_A + ay_A$. Alors A vérifie l'équation.

Si maintenant $B \in \mathcal{D}$ alors $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = 0$ c'est à dire $a(y_B - y_A) - b(x_B * x_A) = 0$ ou encore $-bx_B + ay_B + c = 0$. Ainsi B vérifie l'équation proposée.

Réciproquement, si $M : \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ vérifie $-bx_M + ay_M + c = 0$ alors $-b(x_M - x_A) + a(y_M - y_A) = 0 = \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

Ainsi $M \in \mathcal{D}$. ∎

III.2.6 Exemple
Calculer une équation de la droite $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

III.2.7 Proposition
Tout ensemble d'équation $ax + by + c = 0$ *avec* a, b *non tous les deux nul est une droite du plan dont* $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur.*

Preuve.
On récrit l'équation sous la forme $ax + by = -c$. Il s'agit ici de trouver toutes les solutions et de représenter géométriquement ces solutions.

On a un système à 1 équation, compatible car a, b ne sont pas tous les deux nuls. Il possède donc des solutions et l'ensemble des solutions est de la forme $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ où A est une solution particulière et $\vec{u}$ une solution non nulle de l'équation homogène associée. On voit tout de suite que $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est solution de $ax + by = 0$. CQFD. ∎

III.2.8 Exemple
Trouver un point et un vecteur directeur de $x + 2y - 1 = 0$.

III.2.9 Définition
Soit $\mathcal{D}$ *une droite. Un vecteur normal à* $\mathcal{D}$ *est un vecteur orthogonal à tout vecteur contenu dans* $\mathcal{D}$*. (ie. à tout vecteur de la forme* $\overrightarrow{AB}$ *avec* $A, B \in \mathcal{D}$*).*

III.2.10 Proposition
Une droite possède une infinité de vecteur normaux, tous colinéaires.

Plus précisément, si $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ *alors* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal non nul. L'ensemble des vecteurs normaux à* $\mathcal{D}$ *est alors* $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ *qui est l'unique droite vectorielle perpendiculaire à* $\mathcal{D}$*.*

Preuve.
Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Alors clairement $\vec{n}.\vec{u} = 0$. De plus, si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur contenu dans $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}$ et donc $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{n}.\vec{u} = 0$. Ainsi $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Si maintenant $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{n})$ alors on peut écrire $\vec{v} = \mu\vec{n}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. Alors $\vec{v}.\overrightarrow{AB} = \lambda\mu\vec{n}.\vec{u} = 0$. Donc tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(\vec{n})$ sont normaux à $\mathcal{D}$.

Réciproquement, si un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{D}$ alors $\det(\vec{v}, \vec{n}) = xa - yb = 0$ car $\vec{v} \perp \vec{u}$. Ainsi $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{n})$.

Finalement, l'ensemble des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ est bien $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$. ∎

III.2.11 Corollaire

1. *Un vecteur normal à $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ est* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2. *Etant donné $\vec{n} \neq \vec{0}$ et A un point il existe une unique droite passant par A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal (on pourra dire "et normale à $\vec{n}$").*

Preuve.
Les droites normales à $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont de la forme $M + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix})$ d'après la proposition précédente. La seule qui passe par A est $A + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix})$ ie $ax + by + (-ax_A - by_B) = 0$. ∎

III.2.12 Exemple
Trouver l'équation de la droite normale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par $A : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donner son écriture paramétrique.

Projection orthogonale

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point hors de $\mathcal{D}$. Il existe un unique point $P \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{MP}$ soit normal à $\mathcal{D}$. On l'appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

III.2.14 Exemple
$M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : 2x - y + 3 = 0$. Calculer les coordonnées du projeté P en fonction des coordonnées de M. On note $P : \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{MP} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, ie. $P = M + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus $2x_p - y_p + 3 = 0$ et donc $2(x + 2\lambda) - (y - \lambda) + 3 = 0$ d'où $\lambda = \frac{3-2x+y}{5}$.

Ainsi $x_p = x + 2\lambda = \frac{6+x+2y}{5}, y_p = y - \lambda = \frac{-3+2x+4y}{5}$.

Distance de M à $\mathcal{D}$?

Méthode

Pour calculer le projeté P de M sur $\mathcal{D}$ il faut exprimer deux conditions géométriques :

— $P \in \mathcal{D}$ (par une équation cartésienne ou paramétrique)

— $\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{D}$ (par un produit scalaire, une équation paramétrique ou cartésienne).

Ne pas perdre de vu que les inconnues sont les coordonnées de P et que l'on connait les coordonnées de M (dans le sens ou ce sont des données du problème).

On peut ensuite calculer la distance de M à $\mathcal{D}$.

III.2.16 Exercice
Traiter le cas général.

Inégalités

Représenter la région du plan d'inéquation $x - y + 1 \geqslant 0$.

Même chose avec $x - y + 1 \geqslant 0$ et $2x + y - 1 \leqslant 0$.

Cercles

III.3.1 Définition
Le cercle de rayon $R > 0$ et de centre Ω est l'ensemble des points $\mathcal{C} = \{M | \Omega M = R\}$, l'ensemble des points à une distance R exactement de Ω.

III.3.2 Proposition
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon $R > 0$ et de centre $\Omega : \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$.

L'équation de $\mathcal{C}$ est $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

Preuve.
Trivial..

$$M \in \mathcal{C} \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$ ∎

III.3.3 Proposition
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $R > 0$. L'ensemble d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est le cercle de rayon R et de centre $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve.
Trivial encore une fois. ∎

III.3.4 Exemple
Décrire l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

III.3.5 Proposition
Soient A, B deux points distincts fixés du plan.
L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Preuve.
On note I le milieu de $[AB]$. On a pour tout point M

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \|\overrightarrow{MI}\|^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB})$$

car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. De plus $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -IA^2 = -IB^2$ On obtient donc

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff IM^2 = IA^2$$

Ainsi l'ensemble recherché est le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est à dire le cercle de diamètre $[AB]$. ∎

Intersections

Intersection de droites

Il s'agit ici de résoudre un système non homogène à 2 équations et 2 inconnues... Suivant le rang et la compatibilité on trouve 1 point, une droite ou l'ensemble vide.

D'après le cours sur les système on trouve une droite ou l'ensemble vide ssi les droites sont parallèles (ie les équations homogènes associées sont proportionnelles ie les vecteurs directeurs (ou normaux) sont colinéaires).

Intersection cercle-droite

Par substitution.