Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Autour des formules de trigonométrie)

1. Rappeler, pour $a, b \in \mathbb{R}$, les expressions de $\cos(a+b), \sin(a+b), \cos(a-b), \sin(a-b)$.
   Dans les deux questions suivantes, on souhaite démontrer ces formules.
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ (en notant ses éléments en colonne) munit du produit scalaire canonique et on pose $a, b \in \mathbb{R}$. On note également
   $$u_a = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}, \ u_b = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}, \ v_b = \begin{pmatrix} -\sin(b) \\ \cos(b) \end{pmatrix}$$
   (a) Placer dans le repère canonique les vecteurs u_a et u_b en faisant apparaître les nombres a et b. On prendra pour l'illustration $a > b$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (u_b, v_b)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{R}'$ le repère (O, u_b, v_b).
   (c) On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_a) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ la colonne des coordonnées de u_a dans la base $\mathcal{B}$. Rappeler l'expression de u_a en fonction de α, β et des éléments de $\mathcal{B}$ puis calculer α et β.
   (d) Que vaut l'angle orienté $\widehat{(u_b, u_a)}$? Placer $\mathcal{R}'$, α et β sur votre schéma puis en déduire une autre expression de α et β ainsi que les formules de trigonométrie de la question 1.
3. Nous allons maintenant donner une preuve sans géométrie.
   (a) Rappeler pour $z \in \mathbb{C}$, le développement en série entière de e^z.
   (b) Donner le développement en série entière de cos et sin (en utilisant une variable réelle notée x), en précisant à chaque fois le rayon de convergence.
   (c) **Montrer** que $\forall x \in \mathbb{R} \ \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$.
   (d) On considère, dans cette question deux séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n z^n$ de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Donner le lien entre les deux séries précédentes et $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$ en précisant pour quelles valeurs de z ce lien est valable.
   (e) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$.
   (f) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer en utilisant les question précédentes $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
   En déduire $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$

Exercice 2

On définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[\ f(x) \geqslant 0$ puis que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.
4. Soit $a > 0$ un nombre réel. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. On pourra montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \ t \leqslant 1 + t^2$.
5. Donner une expression de f' et en déduire le tableau de variations de f.
6. Montrer rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ et donner une expression de f''.
7. Déduire des questions précédentes que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie l'équation différentielle
   $$\forall x \in]0, +\infty[\ y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}$$
8. Donner la forme des solutions de l'équation différentielle précédente, sur $]0, +\infty[$.
9. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$

Exercice 3

n désigne un entier naturel non nul.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A ssi $R^2 = A$. On note

$$\mathrm{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ R^2 = A\}$$

l'ensemble des racines carrées de A.

Partie I : Premiers exemples

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une racine carrée de I_2.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une racine carrée de A. Montrer que A est inversible ssi R est inversible.
3. Traduire la question précédente en termes de valeur propre.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que 0 est valeur propre de A et donner la dimension de l'espace propre associé.
   (b) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice D diagonale semblable à A. Le calcul de χ_A est facultatif.
   On note P la matrice de passage utilisée. On ne demande pas le calcul explicite de P ni de P^{-1}
   (c) Donner deux matrices M telle que $(PMP^{-1})^2 = A$.

Partie II : Cas $A = I_n$

Dans cette partie seulement, on pose $A = I_n$ et on cherche à déterminer $\mathrm{Rac}(A) = \mathrm{Rac}(I_n)$.

1. Justifier que A possède au moins une racine carrée.
2. Soit $R \in \mathrm{Rac}(A)$. Montrer que R est inversible et exprimer son inverse.
3. Montrer que la matrice R de la question précédente est diagonalisable et décrire une matrice diagonale correspondante.
4. Décrire en une phrase l'ensemble $\mathrm{Rac}(I_n)$.

Partie III : n valeurs propres distinctes

On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que
$$A = PDP^{-1}$$
où D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = P^{-1}RP$, où P est la matrice de la question précédente.
   Montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si S est une racine carrée de D.
3. **Racines carrées de D**
   On note Δ une racine carrée de D, s'il en existe.
   (a) Montrer que $D\Delta = \Delta D$.
   (b) En déduire que la matrice Δ est diagonale.
   (c) On note alors $\delta_1, \ldots, \delta_n$ les coefficients diagonaux de Δ, dans l'ordre. Que vaut δ_i^2 lorsque $i \in \{1, \ldots, n\}$?
   (d) Que peut-on dire de $\mathrm{Rac}(D)$ si A admet une valeur propre strictement négative ? et de $\mathrm{Rac}(A)$?
   (e) Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D.
4. Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

Exercice 4

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Rappelons que pour k entier, $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial "k parmi n".

On pose , pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$.

Partie I : Étude d'une famille de polynômes

Commençons par donner quelques propriétés des polynômes défini précédemment.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(X)$.
2. Développer les polynômes $B_{2,k}(X)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$.
3. Montrer que $(B_{2,k}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 ou moins.
4. Montrer, de manière générale, que $(B_{n,k}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II : Un produit scalaire.

On considère la fonction φ définie pour tout polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right)$$

1. (a) Calculer $\varphi(P,Q)$ pour $P(X) = X$ et $Q(X) = X - 1$.
   (b) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Orthonormaliser, pour le produit scalaire φ, la base $(X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On exprimera cette nouvelle base orthonormée à l'aide des polynômes $B_{2,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$.
2. On considère maintenant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base $(B_{2,k}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser M. On prendra, si possible, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M et on précisera la matrice diagonale D, la matrice de passage Q, son inverse Q^{-1} ainsi que la relation liant ces matrices.
   (c) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   (d) Démontrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux pour le produit scalaire φ.