Géométrie de l'espace

Antoine Louatron

Table des matières

I Coordonnées

I.1 Bases de l'espace

I.1.1 Définition

1. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (ie. $\gamma \neq 0$, voir le cours de géométrie du plan), on peut également dire que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ pour $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$ (uniques d'ailleurs) .*
2. *Une base de l'espace est la donnée d'un triplet de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. x, y et z sont alors les coordonnées (cartésiennes) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*
3. *Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dite orthonormée directe ssi $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$, et ces vecteurs sont orthogonaux 2 à 2.*

I.1.2 Convention

Dans toute la suite du cours on travaille dans une BOND de référence $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On peut alors identifier l'ensemble des vecteurs de l'espace à $\mathbb{R}^3$: un vecteur est la donnée de 3 coordonnées.

I.1.3 Remarque

En pratique l'unicité des coordonnées nous permet d'identifier chaque composantes de deux vecteurs égaux.

I.1.4 Théorème

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace. Ils forment une base ssi ils sont non coplanaires.

Preuve.
On commence par définir la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées de nos 3 vecteurs dans la base de référence.

Rappel : Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Armé de ceci, on peut faire une preuve très similaire au cas du plan.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base

$$\begin{aligned}
&\iff \forall Y \in \mathbb{R}^3\ \exists! \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ Y = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \\
&\iff \forall Y \in \mathbb{R}^3 \exists! X \in \mathbb{R}^3 Y = MX \\
&\iff M \in GL_3(\mathbb{R}) \\
&\iff \forall X \in \mathbb{R}^3 MX = 0 \Rightarrow X = 0 \\
&\iff x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0 \\
&\iff (\vec{\imath}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ sont non coplanaires.}
\end{aligned}$$

■

I.1.5 Exemple

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que ces vecteurs ne sont pas coplanaires et trouver les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

I.1.6 Définition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace. La matrice de ces vecteurs dans $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans cet ordre. On la note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

I.1.7 M-Remarque

Si P est la matrice de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et que $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ (ie c'est la matrice d'une base), alors les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $X' = P^{-1}X$ ou encore $X = PX'$.

I.2 Repères

I.2.1 Définition
Un repère $\mathcal{R}$ (cartésien) de l'espace est la donnée d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et d'un point O. Si M est un point du plan, il existe alors un unique triplet de réel (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Ce sont les coordonnées (cartésiennes) de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Un tel repère est dit orthonormé direct ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une BOND.

I.2.2 Notation

Si A et B sont deux points, on peut considérer le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les règles de calcul sur les colonnes permettent alors d'écrire $A + \overrightarrow{AB} = B$ ou encore $\overrightarrow{AB} = B - A$

D'une manière générale, si $\vec{u}$ est un vecteur on pourra écrire $A + \vec{u}$. Il s'agit de l'unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$.

I.2.3 Exemple
Le milieu de AB est l'unique point I tel que $I - A = B - I$. Traduire en terme de coordonnées.

I.2.4 Définition
Soient A et B deux points de l'espace, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ respectivement (dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ repère orthonormé). On appelle distance de A à B le nombre

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique, on appelle norme de $\vec{u}$ le réel

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

I.2.5 Théorème
Soient A, B, C trois points de l'espace, et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs.

1. *La distance entre deux points (tout comme la norme d'un vecteur) ne dépend pas du choix du repère orthonormal.*
2. *$AC \leqslant AB + BC$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. Ces distances (resp. normes) sont égales ssi A, B, C sont alignés dans cet ordre (resp. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens)*

Preuve.
Comme on le verra, 3 points ou deux vecteurs sont toujours coplanaires. Ce résultat est en fait un résultat de géométrie du plan.

[linewidth=0.01,labels=none]->(0,0)(-0.5,-0.5)(4.9,3.9) [linewidth=0.02, CurveType=polygon,PosAngle=-135,90,0](1,1)A(2,3)B(4,

FIGURE 1 – Distance et inégalité triangulaire

II Opérations sur les vecteurs

II.1 Produit scalaire

II.1.1 Définition
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $(\vec{u}|\vec{v})$ le réel

$$(\vec{u}|\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'angle entre les vecteurs n'est pas orienté.

II.1.2 Remarques

1. C'est la même définition que dans le plan. On peut donc donner la même interprétation en terme de longueur d'un projeté quand l'une des normes est 1.
2. On en déduit $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}|\vec{u})$

II.1.3 Théorème (Propriétés du produit scalaire)
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors*
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}|\vec{v}) = 0.$$
2. *Propriétés de l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & (\vec{u}|\vec{v}) \end{array}\right.$:
   (a) ***Symétrie*** *: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})$*
   (b) ***Bilinéarité*** *: Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*
$$\left\{\begin{array}{lccl} \textit{Linéarité à droite} & (\vec{u}|\lambda\vec{v}) & = & \lambda(\vec{u}|\vec{v}) \textit{ et } (\vec{u}|\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}|\vec{v}) + (\vec{u}|\vec{w}) \\ \textit{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}|\vec{w}) & = & \lambda(\vec{u}|\vec{w}) + \mu(\vec{v}|\vec{w}) \end{array}\right.$$
3. *Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors*
$$(\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy' + zz'$$
De plus cette formule est invariante par changement de RON. C'est à dire que le lien entre produit scalaire et coordonnées ne dépend pas du RON choisi.

Preuve.

1. Pour tous les points sauf le dernier, voir le cours de géométrie du plan
2. On a par définition des coordonnées $\vec{u} = u\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Il suffit de développer par linéarité $(\vec{u}|\vec{v})$ pour trouver la formule donnée. On se sert de $(\vec{\imath}|\vec{\imath}) = 1, (\vec{\imath}|\vec{\jmath}) = (\vec{\imath}|\vec{k}) = 0$ et autres relations du même genre. ■

II.2 Produit vectoriel

II.2.1 Proposition
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires. Soit $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$

1. *$\vec{n} \perp (\vec{u}$ et $\vec{v})$ ssi $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.*
2. *Dans le cas où $\vec{n} \perp \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$.*

Preuve.

1. Il s'agit simplement de prouver que si $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$ alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. La réciproque est évidente.
   Soit donc $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, c'est à dire que $\vec{w}$ peut s'écrire $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (et même de manière unique, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan considéré).
   Alors $(\vec{n}|\vec{w}) = \lambda(\vec{n}|\vec{u}) + \mu(\vec{n}|\vec{v}) = 0$.
2. On suppose $\vec{n} \neq \vec{0}$ sinon le résultat est trivial. Soit $\vec{w} \perp \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Comme $\vec{n} \notin \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forment une base de l'espace et on peut donc donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}$.
   Alors $(\vec{w}|\vec{u}) = 0$ et donc $\alpha\|\vec{u}\|^2 + \beta(\vec{u}|\vec{v}) = 0$ De même $\alpha(\vec{u}|\vec{v}) + \beta\|\vec{v}\|^2 = 0$.
   La matrice de ce système d'inconnues α, β est $\begin{pmatrix} \|\vec{u}\|^2 & (\vec{u}|\vec{v}) \\ (\vec{u}|\vec{v}) & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix}$. Son déterminant est $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}|\vec{v})^2$ qui est nul ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ce qui n'est pas.

Ainsi la matrice considérée est inversible et donc la seule solution du système précédent est $\alpha = \beta = 0$. Finalement $\vec{w} = \gamma \vec{n}$ est bien colinéaire à $\vec{n}$. ■

II.2.2 Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le vecteur :

- *$\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires*
- *l'unique vecteur $\underbrace{\text{orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}}_{\text{direction}}$ de norme $\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\left|\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\right|}_{\text{longueur}}$ et tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ $\underbrace{\text{est directe}}_{\text{sens}}$.*

Encore une fois, l'angle est vu comme non orienté (ceci est rendu possible par la valeur absolue).
La longueur de ce vecteur est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

II.2.3 Remarque

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

II.2.4 Proposition (Propriétés du produit vectoriel)
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On se place dans un ROND.

1. *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ son colinéaires ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Et donc trois points A, B, C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.*
2. ***Antisymétrie** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.*
3. ***Bilinéarité** : si $\vec{w}$ est un troisième vecteur de l'espace, λ, μ deux réels,*
$$\left\{\begin{array}{lrcl} \textit{Linéarité à droite} & \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) & = & \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{u} \wedge \vec{w}) \\ \textit{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} & = & \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{array}\right.$$
4. *Expression en fonction des coordonnées : on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - x'z \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$*

Preuve.
On a $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$. Ces relations permettent de montrer l'expression en fonction des coordonnées à partir de la bilinéarité. ■

II.2.5 Remarque

Pour retrouver les coordonnées du produit vectoriels en base orthonormée directe, on fait le petit dessin : Il s'agit

[PointName=x,y',y,x',PointSymbol=none,PosAngle=180,0,180,0](0,1)A(1,0)D(0,0)C(1,1)B [PointName=z,x',x,z',PointSyr

$x =$

[PointName=x,y',y,x',PointSymbol=none,PosAngle=180,0,180,0](0,1)A(1,0)D(0,0)C(1,1)B [PointName=z,x',x,z',PointSyr

$y =$

[PointName=x,y',y,x',PointSymbol=none,CurveType=curve,arrows=->,linewidth=0.01,PosAngle=180,0,180,0](0,1)A(1,(

$z =$

Figure 2 – Calcul du produit vectoriel

en fait de trois calculs de déterminants de taille 2

II.2.6 Exemple
Soit $\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\|\vec{u}\|$. Compléter en une BOND.

II.3 Determinant

II.3.1 Définition
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte ou déterminant de ces trois vecteurs le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((\vec{u} \wedge \vec{v})|\vec{w})$$

II.3.2 Interprétation géométrique du déterminant

Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient non nuls, alors
$$|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\|\vec{w}\||\cos(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w})|.$$
Si on se remémore la signification de la norme du produit vectoriel (aire d'un parallélogramme), alors on voit qu'il s'agit du volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

En particulier, si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont orthogonaux 2 à 2 alors $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \pm\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$

[linewidth=0.01,PointName=O,,PointSymbol=none,PosAngle=-135](0,0)O(0.7,2)w(1.2,0.5)v(3,0)u(0,3)uv(0,2)P [linewidth=0.02,

FIGURE 3 – Interprétation géométrique du déterminant

II.3.3 Proposition (Propriétés géométriques du déterminant)
Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace

1. *ils sont coplanaires ssi* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.
2. *Dans le cas contraire,* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est une base directe si* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) > 0$ *et indirecte sinon.*

Preuve.

1. En effet le déterminant est nul ssi $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui est un vecteur orthogonal au plan $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. Ainsi le déterminant de ces trois vecteurs est nul ssi $\vec{w}$ est dans ce plan.
2. Il suffit de se rappeler le fait que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est directement orthogonal au plan $(\vec{u},\vec{v})$ et que le produit scalaire s'interprète en terme de projection orthogonal, le signe donnant les sens relatifs des deux vecteurs. ∎

II.3.4 Proposition (Propriétés algébriques du déterminant)
Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace dont on note les coordonnée $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ *dans notre BOND de référence (ou un ROND). On note alors souvent le déterminant* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *sous la forme* $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

1. $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) == x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$.
2. ***Antisymétrie*** *: le déterminant change de signe quand on échange deux vecteurs. Par exemple* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$.
3. ***Trilinéarité*** *: le déterminant est linéaire par rapport à chacune des trois variables. Comme d'habitude on peut développer en sortant les constantes. Attention ici on a trois termes.*

Preuve.

1. Par définition,
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}|\vec{w})$$
Or on sait que les coordonnées des $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont $(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$ d'après la proposition II.2.4. On utilise maintenant la proposition II.1.3 et on trouve
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = yz'x'' - zyx'' + zxy'' - xz'y'' + xyz'' - yx'z''$$
qui est ce qu'il fallait démontrer.

2. Il suffit d'observer l'expression que l'on vient d'obtenir. Si on change par exemple les $'$ en $''$ on obtient bien l'opposée de l'expression de départ.
3. Il suffit de monter la linéarité à gauche, d'après le point précédent. Soient donc $\vec{x} = (a, b, c)$ un vecteur et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) &= (\lambda x + \mu a)y'z'' + x'y''(\lambda z + \mu c) + x''(\lambda y + \mu b)z' - \dots \\ &= \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})\end{aligned}$$

Comme d'habitude, il suffit de développer... ■

II.3.5 Remarques

1. On peut retrouver cette expression en sommant les "diagonales descendantes" du tableau et en retranchant la somme des "diagonales montantes".
2. $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$

II.3.6 Exercice
Trouver les conditions sur $a \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soient coplanaires.

II.3.7 Exemple
Est-ce que $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible ?

III Plans et droites

III.1 Description géométrique

III.1.1 Définition
Une droite de l'espace est un ensemble de la forme $A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$ où A est un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul qualifié de directeur.

III.1.2 Exemple

1. La droite $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la représentation paramétrique de cette droite.
2. On peut changer A en tout point de la droite et $\vec{u}$ en tout vecteur directeur, ie en tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et non nul.

III.1.3 Définition
Un plan de l'espace est un ensemble de la forme $A + \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où A est un point et $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs non-colinéaires qui forment une base de ce plan.

III.1.4 Représentation paramétrique

Cette fois, il nous faut 2 paramètres que l'on va noter λ et μ. $A + \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de la forme $M = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ie $\operatorname{Vect} AM$ est coplanaire à $(\vec{u}, \vec{v})$.

III.1.5 Bases d'un plan

Le chapitre de géométrie du plan nous montre qu'il existe une infinité de base pour un plan donné : tous les couples de vecteurs non-colinéaires compris dans ce plan.

III.1.6 Vocabulaire

Si une droite ou un plan passe par l'origine du repère, on dit qu'il s'agit d'une droite vectorielle ou d'un plan vectoriel. Plus généralement, la partie vectorielle d'un plan ou d'une droite est appelée sa direction.

III.1.7 Direction et parallélisme

Deux droites (resp plans) sont dites parallèles ssi elles (resp ils) ont la même direction.
Une droite est parallèle à un plan ssi sa direction est inclus dans la direction du plan.

III.2 Plans

III.2.1 Théorème
Tout plan de l'espace possède une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ *avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Réciproquement, tout ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ *avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *est un plan.*

Preuve.
Similaire au résultat sur les équations de droite dans le plan : écrire la nullité d'un déterminant.
Pour trouver une base, on résout le système à 3 inconnues et 1 équation (de rang 1). ■

III.2.2 Remarque

1. Un plan donné possède une infinité d'équation toutes proportionnelles.
2. Une base d'un plan vérifie l'équation homogène associée.

III.2.3 Exemple
Trouver une base et un point de $x - y + 2z + 3 = 0$.

Trouver une équation de $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix})$.

III.2.4 Définition
Soit $\vec{n}$ *un vecteur non nul et* $\mathcal{P}$ *un plan. On dit que* $\vec{n}$ *est un vecteur normal à* $\mathcal{P}$ *s'il est orthogonal à tout vecteur compris dans ce plan. On a démontré qu'il suffit à* $\vec{n}$ *d'être orthogonal à une base de ce plan.*

III.2.5 Proposition
Si $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ *est un plan, alors le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *est normal à* $\mathcal{P}$.

Réciproquement, étant donné $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *un vecteur **non nul** et un point* A*, il existe un unique plan passant par* A *et normal à* $\vec{n}$*. Son équation est de la forme* $ax + by + cz + d = 0$ *où* d *est choisi pour que* A *soit dans le plan.*

Preuve.
Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de la direction de $\mathcal{P}$, ie $ax + by + cz = 0$. Alors $(\vec{n}|\vec{u}) = 0$.

On veut montrer que l'ensemble $\{M|\ \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}\}$ est un plan. Il suffit d'écrire le produit scalaire correspondant pour retrouver une équation de plan. ■

III.2.6 Trouver une équation de plan

Pour trouver une équation de $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ un plan (ie $\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires), on pose $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$. C'est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ ce qui nous fournit les coefficients de x, y et z dans l'équation. Il reste à trouver une bonne constante pour que $A \in \mathcal{P}$

III.2.7 Exemple
Trouver une équation de $\mathcal{P} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})$.

On trouve $x + y + z - 2 = 0$.

III.2.8 Plan passant par 3 points

Par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan (immédiat : non alignés = deux vecteurs non colinéaires).

Ex : $A : \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B : \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, C : \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

III.2.9 Projection orthogonale

Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est l'unique point H vérifiant $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{HM} \perp \mathcal{P}$. On traduit cette deuxième condition par $\overrightarrow{HM}$ est colinéaire à un vecteur normal.

III.2.10 Exemple
Coordonnées du projeté orthogonal de $M : \begin{pmatrix}x_M\\y_M\\z_M\end{pmatrix}$ sur le plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 1 = 0$.

III.2.11 Définition
La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

III.3 Droites

III.3.1 Proposition
Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

Preuve.
Si $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont non parallèles, leurs équations homogènes sont non proportionnelles, ie le système pour leur intersection est de rang 2. Pour le résoudre on pose un paramètre et l'ensemble des solutions est donc de la forme $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$. ∎

III.3.2 Exemple
Intersection de $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{k})$ et $x + y - 3z + 2 = 0$.

III.3.3 Méthode

Pour écrire une droite $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ sous la forme d'une intersection de plan (ie en donner une représentation cartésienne) :

— Methode 1 : résoudre le système paramétrique : trouver lambda dans une équation et réinjecter dans les autres.

— Methode 2 : trouver $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ orthogonaux à $\vec{u}$ et donner les équation de plans normaux à ces vecteurs et passant par A.

III.3.4 Exemple
Un exemple pour chaque méthode.

III.3.5 Projection orthogonale

On prend $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ avec $\|\vec{u}\| = 1$. Attention le raisonnement ne fonctionne que si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.
Le projeté d'un vecteur $\vec{v}$ est $\vec{p}(\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})\vec{u}$ et donc le projeté de M est $p(M) = A + \vec{(p)}(\overrightarrow{AM}) = A + (\overrightarrow{AM}|\vec{u})\vec{u}$.