I Géométrie du plan

Exercice 1 (Techniques de base)
Le plan est rapporté à une repère orthonormé direct, dont la base est la base canonique et le centre noté O.

1. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$.
2. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et normale à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. Même question pour $\mathcal{D}_2$ passant par A et dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Même question avec $\mathcal{D}_3$ passant par A et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Donner deux points, un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_4 : 2x - y + 2 = 0$.
6. Trouver les coordonnées du point d'intersection $\mathcal{D}_4$ et de la droite passant par B et perpendiculaire à $\mathcal{D}_4$. Interpréter géométriquement ce point.

Exercice 2
Posons $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner la matrice R canoniquement associée à la rotation r telle que $r(e_1) = \vec{u}$. Préciser son angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ en fonction de a et b.
   Indication : l'expression de l'angle dépend fortement des signes de a et b.
2. On note $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$. Donner la matrice S canoniquement associée à la réflexion d'axe D.
3. Vérifier que $S \in O_2(\mathbb{R})$ et que $\det(S) = -1$.
4. Interpréter géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à RS.
5. Même question avec SR.

II Géométrie de l'espace

Exercice 3 (Techniques de base)
On rapporte l'espace à une repère orthonormé direct dont la base est la base canonique.

1. Donner un vecteur directeur ainsi qu'une représentation paramétrique[1] de $\mathcal{D}$ la droite passant par $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Trouver un système d'équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Donner un point, une base et un vecteur normal de $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z + 2 = 0$.
4. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$, le plan passant par $A : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$, le plan passant par A et dont une base est $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
6. Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

Exercice 4
Décrire les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrices dans la base canonique :

a) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

III Coniques

Exercice 5
Déterminer tous les éléments des coniques d'équation

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 21 = 0$$
$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$
$$9x^3 + 4xy + 6y^2 + \alpha = 0$$

avec $\alpha = -20, 0, 20$.

Exercice 6
Soit A le point de coordonnée $(1, 0)$. On considère la parabole $\mathcal{P} : y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$, on considère la droite $\Delta_m : y = m(1 - x)$ passant par A.

1. Représenter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ sur un même graphique.
2. Δ_m coupe $\mathcal{P}$ en A et un autre point M et coupe $\mathcal{E}$ en A et un autre point N. Déterminer les coordonnées de M et N.

[1] On cherche une courbe paramétrée dont le support est $\mathcal{D}$

3. Déterminer des équations des tangentes en M et N à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ respectivement. On pourra passer par une représentation paramétrique.
4. Ces deux tangentes s'intersectent en I_m. Déterminer le lieu des I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.