Devoir en temps libre 1

A rendre le 13 septembre au plus tard. Les résultats seront soulignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$.

Définition

La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est continue et admet donc des primitives. On appelle ln (logarithme népérien ou logarithme) la primitive de f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Nous disposons donc des informations suivantes :

1. $\ln(1) = 0$
2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction inverse (f)

et c'est tout !

Exercice 1

1. *Soit $a > 0$. On va montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.*
   (a) *On pose $g : x \mapsto \ln(ax)$. Donner le domaine de définition et prouver la dérivabilité de g.*
   (b) *Calculer g' et en déduire que $g - \ln$ est une constante réelle que l'on note K.*
   (c) *Trouver la valeur de K et conclure.*
2. *Montrer que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.*
3. *On admet que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Calculer $\lim_{x \to 0} \ln(x)$ et dresser le tableau de variations complet de ln.*
4. *On cherche à calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.*
   (a) *Soit $x > 0$. Calculer $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.*
   (b) *Montrer que pour $t \geqslant 1$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$.*
   (c) *En déduire que $\ln(x) \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$.*
   (d) *Conclure.*
5. *En déduire que $x \ln(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$.*
6. *Tracer l'allure de la courbe représentative de ln en faisant apparaître la tangente en 1.*