I Coordonnées

I.1 Bases de l'espace

Définition 1

1. *Trois vecteurs* $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *de l'espace sont dits coplanaires si il existe* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *non tous nuls tels que* $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$.

   Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont non colinéaires, on peut également dire que* $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ *pour* $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$ *(uniques d'ailleurs) .*

2. *Une* base *de l'espace est la donnée d'un triplet de vecteurs* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *tel que tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme* $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ *avec* $x, y, z \in \mathbb{R}$. x, y *et* z *sont alors les* coordonnées (cartésiennes) *de* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

3. *Une base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *est dite orthonormée directe ssi* $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$, *et ces vecteurs sont orthogonaux 2 à 2. Pour le caractère direct ou non, cf votre triedre préféré en main droite.*

Définition 2
Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *3 vecteurs de l'espace. La matrice de ces vecteurs dans* $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dans cet ordre. On la note* $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Théorème 1
Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *3 vecteurs de l'espace. Ils forment une base ssi ils sont non coplanaires ssi* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *est inversible.*

I.2 Repères

Définition 3
Un repère $\mathcal{R}$ *(cartésien) de l'espace est la donnée d'une base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *et d'un point* O. *Si* M *est un point du plan, il existe alors un unique triplet de réel* (x, y, z) *tel que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. *Ce sont les* coordonnées (cartésiennes) *de* M *dans le repère* $\mathcal{R}$.

Un tel repère est dit orthonormé direct ssi la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *est une BOND.*

Définition 4
Soit $\vec{u}$ *un vecteur de l'espace de coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *dans la base canonique, on appelle* norme *de* $\vec{u}$ *le réel*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Soient A *et* B *deux points de l'espace, de coordonnées* $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ *respectivement (dans* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *repère orthonormé). On appelle* distance *de* A *à* B *le nombre*

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Théorème 2
Soient A, B, C *trois points de l'espace, et* $\vec{u}, \vec{v}$ *deux vecteurs.*

1. *La distance entre deux points (tout comme la norme d'un vecteur) ne dépend pas du choix du repère orthonormal.*
2. $AC \leqslant AB + BC$ *et* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. *Ces distances (resp. normes) sont égales ssi* A, B, C *sont alignés dans cet ordre (resp.* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires de même sens)*

II Opérations sur les vecteurs

II.1 Produit scalaire

Définition 5
Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace. On appelle* produit scalaire *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et on note* $(\vec{u}|\vec{v})$ *le réel*

$$(\vec{u}|\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'angle entre les vecteurs n'est pas orienté.

Théorème 3 (Propriétés du produit scalaire)
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. *Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan. Alors*
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}|\vec{v}) = 0.$$
2. *Propriétés de l'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & (\vec{u}|\vec{v}) \end{array} \right.$ *:*
   (a) ***Symétrie*** *:* $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \ (\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})$
   (b) ***Bilinéarité*** *: Soient* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \text{Linéarité à droite} & (\vec{u}|\lambda\vec{v}) & = & \lambda(\vec{u}|\vec{v}) \text{ et } (\vec{u}|\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}|\vec{v}) + (\vec{u}|\vec{w}) \\ \text{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}|\vec{w}) & = & \lambda(\vec{u}|\vec{w}) + \mu(\vec{v}|\vec{w}) \end{array} \right.$$

3. *Si* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *alors*

$$(\vec{u}|\vec{v}) = xx' + yy' + zz'$$

De plus cette formule est invariante par changement de RON. C'est à dire que le lien entre produit scalaire et coordonnées ne dépend pas du RON choisi.

II.2 Produit vectoriel

Proposition 1

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace non colinéaires. Soit* $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$

1. $\vec{n} \perp (\vec{u}$ *et* $\vec{v})$ *ssi* $\vec{n}$ *est orthogonal à tout vecteur de* $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
2. *Dans le cas où* $\vec{n} \perp \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, *tout vecteur orthogonal à* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est colinéaire à* $\vec{n}$.

Définition 6

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et on note* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *le vecteur :*

— $\vec{0}$ *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*

— *l'unique vecteur* $\underbrace{\text{orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}}_{\text{direction}}$ *de norme* $\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})}|}_{\text{longueur}}$ *et tel que la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ $\underbrace{\text{est directe}}_{\text{sens}}$ *sinon.*

Encore une fois, l'angle est vu comme non orienté (ceci est rendu possible par la valeur absolue).

La longueur de ce vecteur est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Proposition 2 (Propriétés du produit vectoriel)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace. On se place dans un ROND.*

1. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *son colinéaires ssi* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. *Et donc trois points* A, B, C *sont alignés ssi* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.
2. ***Antisymétrie*** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
3. ***Bilinéarité*** *: si* $\vec{w}$ *est un troisième vecteur de l'espace,* λ, μ *deux réels,*

$$\begin{cases} \text{Linéarité à droite} & \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{u} \wedge \vec{w}) \\ \text{Linéarité à gauche} & (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{cases}$$

4. *Expression en fonction des coordonnées : on pose* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *alors*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - x'z \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

II.3 Determinant

Définition 7

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace. On appelle* produit mixte *ou déterminant de ces trois vecteurs le réel*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((\vec{u} \wedge \vec{v})|\vec{w})$$

Proposition 3 (Propriétés géométriques du déterminant)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace*

1. *ils sont coplanaires ssi* $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
2. *Dans le cas contraire,* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *est une base directe si* $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$ *et indirecte sinon.*

Proposition 4 (Propriétés algébriques du déterminant)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace dont on note les coordonnée* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ *dans notre BOND de référence (ou un ROND). On note alors souvent le déterminant* $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *sous la forme* $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) == x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$.
2. ***Antisymétrie*** *: le déterminant change de signe quand on échange deux vecteurs. Par exemple* $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.
3. ***Trilinéarité*** *: le déterminant est linéaire par rapport à chacune des trois variables. Comme d'habitude on peut développer en sortant les constantes. Attention ici on a trois termes.*

III Plans et droites

III.1 Description géométrique

Définition 8

Une droite de l'espace est un ensemble de la forme $A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ *où* A *est un point de l'espace et* $\vec{u}$ *un vecteur non nul qualifié de directeur.*

Définition 9
Un plan de l'espace est un ensemble de la forme $A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ *où* A *est un point et* $(\vec{u}, \vec{v})$ *deux vecteurs non-colinéaires qui forment une base de ce plan.*

III.2 Plans

Théorème 4
Tout plan de l'espace possède une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Réciproquement, tout ensemble d'équation $ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ *est un plan.*

Définition 10
Soit $\vec{n}$ *un vecteur non nul et* $\mathcal{P}$ *un plan. On dit que* $\vec{n}$ *est un vecteur normal à* $\mathcal{P}$ *s'il est orthogonal à tout vecteur compris dans ce plan. On a démontré qu'il suffit à* $\vec{n}$ *d'être orthogonal à une base de ce plan.*

Proposition 5
Si $\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$ *est un plan, alors le vecteur* $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est normal à* $\mathcal{P}$.

Réciproquement, étant donné $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *un vecteur* ***non nul*** *et un point* A, *il existe un unique plan passant par* A *et normal à* $\vec{n}$. *Il possède une équation de la forme* $ax+by+cz+d=0$ *où* d *est choisi pour que* A *soit dans le plan.*

Définition 11
La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

III.3 Droites

Proposition 6
Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.