Table des matières

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Etude de courbes : rappels

I.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

I.1.1 Définition
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}\right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

I.1.2 Définition
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

I.1.3 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$?

I.2 Tangentes, variations

I.2.1 Théorème
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

I.3 Étude locale

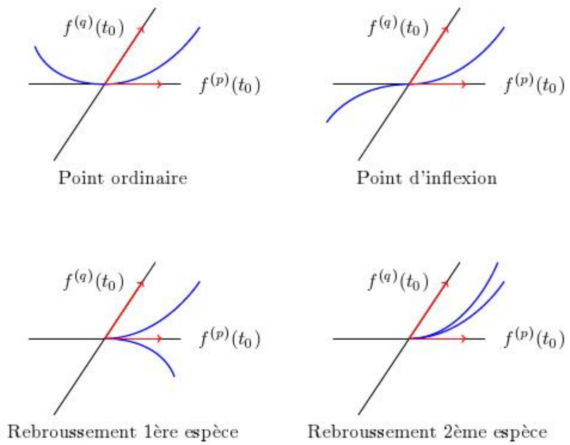
I.3.1 Rappels

Pour une courbe f de classe $\mathcal{C}^k$ et un paramètre fixé t_0, lorsqu'on veut étudier l'allure de la courbe au point $M_0 = f(t_0)$, on calcule l'entier p qui est le plus petit entier **non nul** tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ puis l'entier q qui est le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$. La tangente en M_0 est alors dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ et passe par M_0.

Dans le cas (classique) $p = 1$ et $q = 2$, c'est à dire que la vitesse et l'accélération sont non colinéaires (et donc toutes les deux non nulles), on dit que M_0 est un point birégulier.

I.3.2 Etude locale

Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas suivants.



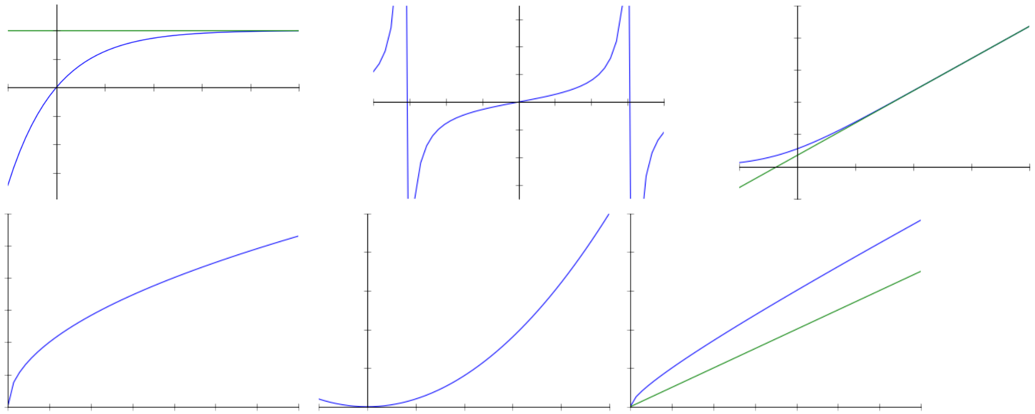
I.4 Branches infinies

I.4.1 Méthode

Soit f une courbe paramétrée et a une borne ouverte de l'ensemble d'étude.

On doit effectuer une étude de branche infinie lorsque qu moins l'une des limites de x ou y en a est infinie.

1. Si $x(t) \underset{t\to a}{\to} \pm\infty$ et $y(t)$ possède une limite finie ℓ en a, alors le support de f possède une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
2. Si $y(t) \underset{t\to a}{\to} \pm\infty$ et $x(t)$ possède une limite finie ℓ en a, alors le support de f possède une asymptote verticale d'équation $x = \ell$.
3. Si les deux limites sont infinies, alors on doit étudier la limite en a de la quantité $\frac{y(t)}{x(t)}$
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas et il faut étudier la limite de $y(t) - \alpha x(t)$
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente m.



II Etude métrique

II.1 Longueur d'une courbe

II.1.1 Notion intuitive de longueur

Longueur de la courbe entre les points de paramètres t et $t + \mathrm{d}t$ est $\approx \|f'(t)\|\mathrm{d}t =$ vitesse $\times$ temps. Si on intègre entre a et b, on trouve donc la longueur de la courbe entre les points de paramètres a et b.

II.1.2 Définition

Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t$.

II.1.3 Exemple

1. Calculer la longueur du cercle trigonométrique.
2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ entre les abscisses 0 et 2.

   On considère la courbe paramétrée $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ dont le support est cette parabole. En effet, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $y = x^2$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t$ et $y = x^2 = t^2$. f est une courbe $\mathcal{C}^1$ et on a $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

   La longueur l cherchée vaut donc $l = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2}\mathrm{d}t$. On sait que $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   On veut poser une nouvelle variable u telle que $2t = \mathrm{sh}(u)$ (qui est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif) ie $t = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(u)$. On pose α tel que $\frac{1}{2}\mathrm{sh}(\alpha) = 2$ ie $\mathrm{sh}\,\alpha = 4$. On a de plus $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$

   Alors $l = \displaystyle\int_0^\alpha \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(u)}\frac{1}{2}\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \mathrm{ch}^2(u)\mathrm{d}u$ car ch est positive et $\mathrm{ch}^2 = 1 + \mathrm{sh}^2$.

   Ainsi
   $$l = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4}\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2u}}{2} + 2u - \frac{e^{-2u}}{2}\right]_0^\alpha = \frac{e^{2\alpha} + 4\alpha - e^{2\alpha}}{16}$$

   Or on a $e^\alpha - e^{-\alpha} = 8$ car $\mathrm{sh}(\alpha) = 4$. Ainsi $(e^\alpha)^2 - 8e^\alpha - 1 = 0$. En considérant que l'inconnue est e^α, on trouve que le discriminant est $68 = 4 \times 17$. Ainsi $e^\alpha = \frac{8+2\sqrt{17}}{2} = 4 + \sqrt{17}$ (l'autre racine du trinôme est strictement négative). On en déduit que $\alpha = \ln(4 + \sqrt{17})$ et $e^{2\alpha} = 8e^\alpha + 1 = 33 + 8\sqrt{17}$. De plus, $e^{-\alpha} = e^\alpha - 8 = \sqrt{17} - 4$ et donc $e^{-2\alpha} = 1 - 8e^{-\alpha} = 33 - 8\sqrt{17}$.

Finalement $l = \frac{33+8\sqrt{17}+4\ln(4+\sqrt{17})-(33-8\sqrt{17})}{16} = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$.
On peut aisément vérifier en python

```
import scipy.integrate as sci
import numpy as np
def f(t):
    return np.sqrt(1 + 4*t**2)

sci.quad(f, 0, 2)  # valeur approchée de l'intégrale de f entre 0 et 2
np.sqrt(17) + np.log(4 + np.sqrt(17))/4
```

II.1.4 Exemple

Longueur de la cycloïde sur $[-\pi, \pi]$ définie par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. On trouve $\|f'(t)\| = 2|\sin \frac{t}{2}|$.

Alors la longueur cherchée est $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2|\sin \frac{t}{2}|\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2}\mathrm{d}t$ car $t \mapsto |sin\frac{t}{2}|$ est paire et $\forall t \in [0, \pi]\ \ \sin \frac{t}{2} \geqslant 0$.

On obtient donc $4\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8$, qui la longueur d'une arche de cette cycloïde.

II.2 Abscisse curviligne

On considère maintenant $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe **régulière** (la vitesse ne s'annule pas), avec $k \geqslant 1$.

II.2.1 Définition

Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\mathrm{d}u \end{array} \right.$.

A retenir : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$ et lorsque cela a du sens, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}$.

II.2.2 Remarque

L'information connue *a priori* sur s est la dérivée : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$. Elle ne dépend pas de l'origine choisie. Dans la suite on supposera choisie une origine.

II.2.3 Proposition

On considère une courbe régulière f de classe $\mathcal{C}^k$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

Interprétation : on peut, dans le cas d'une courbe régulière, repérer un point de la trajectoire non plus par le temps de passage mais par la distance (algébrique) à l'origine fixée. En effet tout point est à une distance donnée (surjectivité) et à une distance donnée correspond un seul point (injectivité).

De plus, on ne change pas la classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe paramétrée si on choisi d'utiliser l'abscisse curviligne d'origine t_0 pour paramétrer (repérer les points).

Preuve.
Rappelons que l'application $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Ainsi $g : t \mapsto \|f'(t)\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I car f' ne s'annule pas. On a même $\forall t \in I\ g(t) > 0$.

De plus, $s : t \mapsto \int\limits_{t_0}^{t} g(u)\mathrm{d}u$ est la primitive de g qui s'annule en t_0 et est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Comme $s' = g > 0$, s est strictement croissante et $s : I \to s(I)$ est bien une bijection.

Comme s' ne s'annule pas, s^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$. Pour mémoire, on a $\forall x \in s(I)\ (s^{-1})'(x) = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))}$. ∎

II.2.4 Paramétrage par l'abscisse curviligne

Notons $J = s(I)$. Le résultat précédent permet de définir une nouvelle courbe de même support $g : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array} \right.$. On a en fait changé la manière de parcourir la même trajectoire, et on obtient immédiatement $\left\|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\right\| = 1$ (paramétrage normal). Remarquons que $u = s(t) \Rightarrow g(u) = f(t)$.

II.2.5 Notation

La relation relation $\left\|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\right\| = 1$ est classiquement notée $\left\|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$, pour indiquer que le paramétrage choisi est celui par l'abscisse curviligne. On a maintenant $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = f' \times \frac{1}{\|f'\|}$.

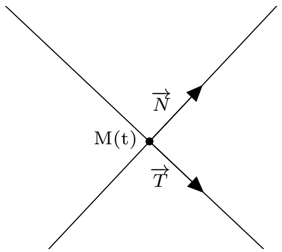
Si on paramètre f par s, on repère en fait les points de la trajectoire non plus par le temps de parcours, mais par la distance depuis l'origine. Il semble cohérent que le vecteur vitesse soit de norme 1.

II.2.6 Proposition
Pour une courbe régulière f, on a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|f'\|}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. C'est un vecteur directeur unitaire de la tangente pour chaque paramètre.

II.3 Repère de Frenet

II.3.1 Définition
Soit $t \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\overrightarrow{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$.

Le repère $(f(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t.



II.3.2 Théorème (Détermination angulaire)
Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \ \overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath} = \vec{u}_{\alpha(t)}.$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{T}(t)$.

Preuve.
Hors programme.

On considère la fonction $g : I \to \mathbb{C}$ qui à t associe l'affixe de $\overrightarrow{T}(t)$. On a $\|\overrightarrow{T}(t)\| = 1$ et donc $|g(t)| = 1$. il s'agit de montrer que $\forall t \in I \ g(t) = e^{i\alpha(t)}$ et que la fonction α est $\mathcal{C}^{k-1}$. On sait que g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

On a $g\overline{g} = 1$ et en dérivant on obtient $g'\overline{g} + g\overline{g'} = 0$, c'est à dire que la fonction $g'\overline{g} = \frac{g'}{g}$ (si $|z| = 1$ alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$) est imaginaire pure.

On fixe $t_0 \in I$. Soit $\theta : t \mapsto -i\int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$. Alors $\theta : I \to \mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$

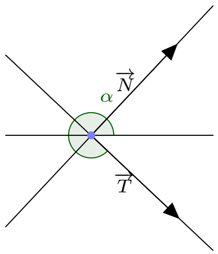
On a alors $\left(\frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)}\right) = \frac{i\theta'(t)e^{i\theta(t)}g(t) - e^{i\theta(t)}g'(t)}{f^2(t)} = \frac{e^{\theta(t)}}{g^2(t)}\left(\frac{g'(t)}{g(t)}g(t) - g(t)\right) = 0$

Ainsi $t \mapsto \frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)}$ est une fonction constante sur l'intervalle I.

$$g(t) = Ke^{i\theta(t)}$$

avec $g(t_0) = K = e^{ia}$ car $|g(t_0)| = 1$ et donc $g(t) = e^{i(a+\theta(t))}$ et $\alpha = a + \theta \in \mathcal{C}^{k-1}$ convient ! ∎

II.3.3 Illustration



II.3.4 Proposition
1. On a alors $\overrightarrow{N(t)} = -\sin\alpha(t)\vec{\imath} + \cos\alpha(t)\mathrm{d}t = \vec{v}_{\alpha(t)}$
2. Comme $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$, on en déduit que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\ (= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}) = \cos\alpha$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

II.3.5 Exemple
Déterminer la fonction $t \mapsto \alpha(t)$ pour la courbe représentative de l'exponentielle.

On considère la courbe paramétrée associée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$ qui est une courbe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée vaut $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi f est bien une courbe régulière.

Reprenons la définition de α. Pour cela il nous faut calculer le repère de Frénet en tout point. On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$ et donc $\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche $\alpha(t)$ tel que $\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin(\alpha(t))\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On a donc $\cos(\alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$ et $\sin(\alpha(t)) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$.

Ainsi (et c'est cohérent avec le tracé), $\cos(\alpha(t)) > 0$ et $\sin(\alpha(t)) > 0$. On peut prendre $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$ ou $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)$ ou même, comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $\alpha(t) = \arctan(e^t)$.

II.4 Courbure

II.4.1 Définition

On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1}.

II.4.2 Interprétation

1. Si $\gamma > 0$, c'est que la détermination angulaire croit, c'est à dire que la courbe tourne vers la gauche.
2. Si $\gamma < 0$, c'est que la détermination angulaire décroît, c'est à dire que la courbe tourne vers la droite.
3. Si γ est grand en valeur absolue, c'est que α change rapidement, c'est à dire que la courbe tourne "vite".

II.4.3 Théorème (Formules de Frenet)

On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

Preuve.
On a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$. ■

II.4.4 Exemple

Calculer l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération en fonction de $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \gamma$.
On note $v = \|f'\|$ et $\vec{v} = f'$. Alors $\vec{v} = v\vec{T}$ par définition de $\vec{T}$.

De plus, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v^2\gamma\vec{N}$.

II.4.5 Exemple

1. Courbure du cercle de centre O et de rayon $R > 0$. On trouve $\gamma = \frac{1}{R}$ (une fonction constante).
2. Pour la cycloïde, sur $]-\pi, \pi[$, on avait $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$.
   Ainsi $\vec{T} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}1-\cos(t)\\ \sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\frac{t}{2}\\ \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}$. Donc $\vec{N} = \begin{pmatrix}-\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}$.
   De plus, $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}$ et donc $\gamma(t) = \frac{-1}{4\sin\frac{t}{2}}$.

II.4.6 Dans le repère de Frenet

Si on calcule $[\overrightarrow{T}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}]$ (produit mixte, c'est le déterminant dans le plan qui ne dépend pas du ROND choisi pour le calculer), on obtient γ en prenant les coordonnées dans la base de Frenet.

Hors, $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\|f'\|}f'$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|}\right)' f' + \frac{1}{\|f'\|}f''\right)$.

Ainsi $\gamma = \left[\frac{1}{\|f'\|}f', \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|}\right)' f' + \frac{1}{\|f'\|}f''\right)\right] = [[\frac{1}{\|f'\|}f', [\frac{1}{\|f'\|^2}f''] = \frac{1}{\|f'\|^3}[f', f'']$ (linéarité + caractère alterné). Finalement

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3 \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right]$$

II.4.7 Exercice

Traduire cette formule en fonction des fonctions coordonnées x, y. Et si f est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix}t\\ \varphi(t)\end{pmatrix}$?

III Enveloppe, développée

III.1 Courbe développée

III.1.1 Définition

Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

III.1.2 Proposition

Pour une courbe $\mathcal{C}^2$, le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Preuve.
Il s'agit juste d'une redite du calcul de $\gamma(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|^3}[f'(t), f''(t)]$. ■

III.1.3 Définition

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

III.1.4 Interprétation

Au point de paramètre $t_1 \in I$, le cercle tangent en $\overrightarrow{T(t_1)}$ qui “ressemble” le plus à la courbe est le cercle centré en $C(t_1)$ et de rayon $R(t_1)$. On l'appelle cercle de courbure en t_1.

III.1.5 Définition

Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

III.1.6 Exemple

Prenons comme courbe l'ellipse $f : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t)$ sur $[-\pi, \pi]$. Trouvons sa courbe développée.

f est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. $f'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ et donc

$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2(t)+\cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

Trouvons γ.

On a $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3\sin^2(t)+1}} \left(-\frac{1}{2} \frac{6\cos(t)\sin(t)}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3\sin^2(t)+1}} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \left(-3\cos(t)\sin(t) \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + (3\sin^2(t)+1) \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \begin{pmatrix} 6\cos(t)\sin^2(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) - 2\cos(t) \\ -3\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -4\sin(t) \end{pmatrix} = \frac{2}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}} \vec{N}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\gamma(t) = \frac{2}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Maintenant, le centre de courbure vérifie $C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{3\sin^2(t)+1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) - \frac{3}{2}\cos(t)\sin^2(t) \\ -3\sin^3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ -2\sin^3(t) \end{pmatrix}$ et on reconnaît une astroïde.

III.1.7 Exemple

Calculons la développée de la cycloïde (sur $]-\pi, \pi[$, le reste s'obtenant par translation).

Ici $M(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. De plus, $R(t) = -4\sin\frac{t}{2}$ et $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi $C(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2(1 - \cos(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin(t) \\ -1 + \cos(t) \end{pmatrix}$. On obtient une autre cycloïde.

III.2 Enveloppe

III.2.1 Définition

Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

III.2.2 Mise en équation

On se donne un points $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ pour chaque droite $\mathcal{D}_t$. Ainsi $\mathcal{D}_t = \{A(t) + \lambda\vec{u}(t) |\ \lambda \in \mathbb{R}\} = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$.

On cherche donc à écrire $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et il faut en plus que la tangente en $M(t)$ soit dirigée par $\vec{u}(t)$.

On suppose les fonctions en jeu dérivables et on obtient $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$. La condition de tangence devient $[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)] = 0$ qui peut se récrire $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ (le déterminant est alterné).

III.2.3 Proposition

Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

III.2.4 Exemple
Cherchons l'enveloppe de la famille de droites $\mathcal{D}_t : x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $D_t = \begin{pmatrix}\sin(t)\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}\cos(t)\\1\end{pmatrix}) = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$.

On cherche $\lambda(t)$ tel que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et vérifiant $\det_{\mathcal{B}_c}(M'(t), \vec{u}(t)) = 0$. Alors la fonction λ vérifie $\det(A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0$ ie $\begin{vmatrix}\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) & \cos(t)\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ ou encore $\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) = 0$.

Pour $t \notin \{-\pi, 0, \pi\}$, $\lambda(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et on obtient $M(t) = \begin{pmatrix}\sin(t)\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\\\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(t) + \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\\\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sin(t)}\\\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\end{pmatrix}$.

On peut tracer au remarquer que tous les points de la courbe vérifient $x^2 - y^2 = 1$. On connaît les symétries de cette courbes qui correspondent à celles de l'enveloppe calculée.

De plus, si on prend $x, y \geqslant 0$ tels que $x^2 - y^2 = 1$ alors $x^2 = 1 + y^2 \geqslant 1$ et donc $|x| \geqslant 1$. Ainsi on peut poser un $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\frac{1}{x} = \sin(t)$ et donc $x = \frac{1}{\sin(t)}$. On a alors $y^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2(t)} - 1 = \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}$. Ainsi $y = \pm\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et comme $y \geqslant 0$, $y = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

Finalement, on peut paramétrer notre quart d'hyperbole pour être la courbe enveloppe calculée et le tracé est maintenant immédiat.

III.2.5 Proposition
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.

Preuve.
Notons $g : s \mapsto C(s) = M(s) + R(s)\overrightarrow{N}(s)$ la courbe développée de f que l'on a paramétré par l'abscisse curviligne. Clairement chaque point de g est sur une normale.

Il reste à montrer que les normales sont tangentes à g. Or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N} + R \times (-\gamma\overrightarrow{T}) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$. Ainsi les tangentes à g sont dirigées par $\overrightarrow{N}$. ■

III.2.6 Exemple
Calculons la développée de la demi-hyperbole paramétrée par $x(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $y(t) = \mathrm{sh}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On note $f : t \mapsto \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{sh}(t)\\\mathrm{ch}(t)\end{pmatrix}$ et donc $\vec{N}(t)$ est proportionnel à $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix}-\mathrm{ch}(t)\\\mathrm{sh}(t)\end{pmatrix}$.

On cherche donc une courbe notée M qui vérifie $M(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t)\\\mathrm{sh}(t)\end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix}-\mathrm{ch}(t)\\\mathrm{sh}(t)\end{pmatrix}$ pour une fonction λ telle que $[f'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Cette équation peut s'écrire $\begin{vmatrix}\mathrm{sh}(t) - \lambda(t)\,\mathrm{sh}(t) & -\mathrm{ch}(t)\\ \mathrm{ch}(t) + \lambda(t)\,\mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t)\end{vmatrix} = 0$ ou encore $\mathrm{sh}^2(t) + \mathrm{ch}^2(t) + \lambda(t)(-\mathrm{sh}^2(t) + \mathrm{ch}^2(t)) = 0$ c'est à dire $\lambda(t) = -\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t)$.

Finalement, $M(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t) + \mathrm{ch}^3(t) + \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)\\\mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}(t) - \mathrm{sh}^3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\,\mathrm{ch}^3(t)\\-2\,\mathrm{sh}^3(t)\end{pmatrix}$

Index