Table des matières

I Etude de courbes : rappels 1
I.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$ 1
I.1.1 Courbes représentatives 1
I.2 Tangentes, variations 1
I.3 Étude locale 1
I.3.1 Rappels 1
I.3.2 Etude locale 1
I.4 Branches infinies 2
I.4.1 Méthode 2

II Étude métrique 2
II.1 Longueur d'une courbe 2
II.2 Abscisse curviligne 2
II.3 Repère de Frenet 2
II.4 Courbure 3

III Enveloppe, développée 3
III.1 Courbe développée 3
III.2 Enveloppe 3

I Etude de courbes : rappels

I.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array} \right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

Définition 2
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

I.1.1 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \right\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$?

I.2 Tangentes, variations

Théorème 1
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

I.3 Étude locale

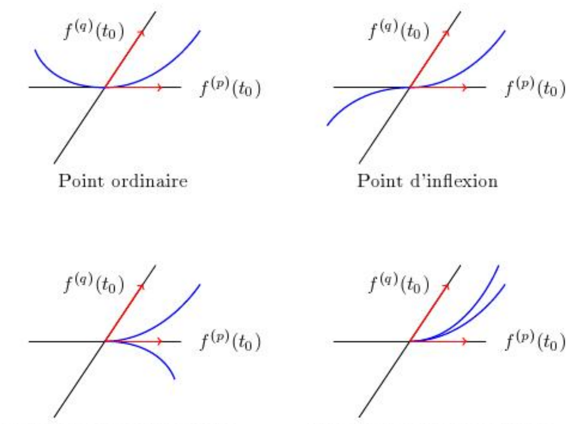
I.3.1 Rappels

Pour une courbe f de classe $\mathcal{C}^k$ et un paramètre fixé t_0, lorsqu'on veut étudier l'allure de la courbe au point $M_0 = f(t_0)$, on calcule l'entier p qui est le plus petit entier **non nul** tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ puis l'entier q qui est le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$. La tangente en M_0 est alors dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ et passe par M_0.

Dans le cas (classique) $p = 1$ et $q = 2$, c'est à dire que la vitesse et l'accélération sont non colinéaires (et donc toutes les deux non nulles), on dit que M_0 est un point birégulier.

I.3.2 Etude locale

Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas suivants.



Point ordinaire — Point d'inflexion

Rebroussement 1ère espèce — Rebroussement 2ème espèce

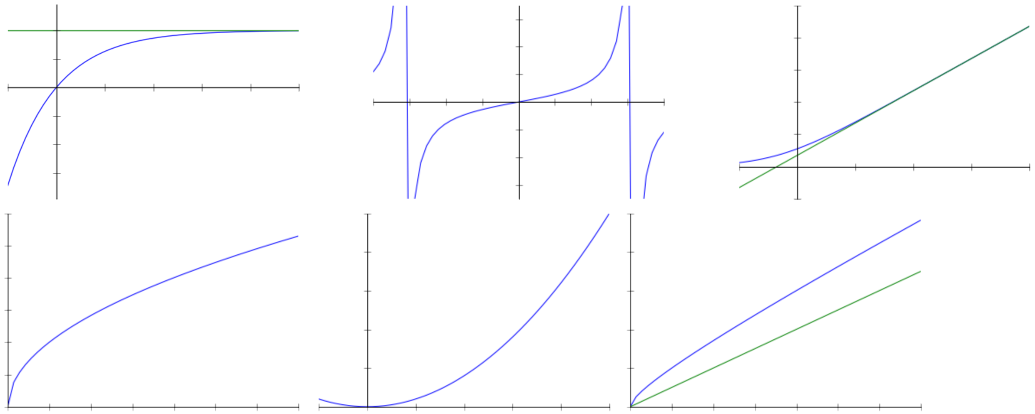
I.4 Branches infinies

I.4.1 Méthode

Soit f une courbe paramétrée et a une borne ouverte de l'ensemble d'étude.

On doit effectuer une étude de branche infinie lorsque qu moins l'une des limites de x ou y en a est infinie.

1. Si $x(t) \underset{t \to a}{\to} \pm\infty$ et $y(t)$ possède une limite finie ℓ en a, alors le support de f possède une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
2. Si $y(t) \underset{t \to a}{\to} \pm\infty$ et $x(t)$ possède une limite finie ℓ en a, alors le support de f possède une asymptote verticale d'équation $x = \ell$.
3. Si les deux limites sont infinies, alors on doit étudier la limite en a de la quantité $\frac{y(t)}{x(t)}$
   (a) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ il y a deux cas et il faut étudier la limite de $y(t) - \alpha x(t)$
      i. si $\lim\limits_{t \to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente m.



II Étude métrique

II.1 Longueur d'une courbe

Définition 3
Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| \mathrm{d}t$.

II.2 Abscisse curviligne

Définition 4
Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \mathrm{d}u \end{array} \right.$.

A retenir : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$ et lorsque cela a du sens, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}$.

Proposition 1
On considère une courbe régulière f de classe $\mathcal{C}^k$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

Interprétation : on peut, dans le cas d'une courbe régulière, repérer un point de la trajectoire non plus par le temps de passage mais par la distance (algébrique) à l'origine fixée. En effet tout point est à une distance donnée (surjectivité) et à une distance donnée correspond un seul point (injectivité).

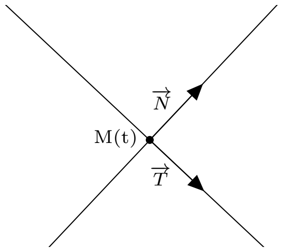
De plus, on ne change pas la classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe paramétrée si on choisi d'utiliser l'abscisse curviligne d'origine t_0 pour paramétrer (repérer les points).

Proposition 2
Pour une courbe régulière f, on a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|f'\|}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. C'est un vecteur directeur unitaire de la tangente pour chaque paramètre.

II.3 Repère de Frenet

Définition 5
Soit $t \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\overrightarrow{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$.

Le repère $(f(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t.



Théorème 2 (Détermination angulaire)
Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \ \overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath} = \vec{u}_{\alpha(t)}.$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{T}(t)$.

Proposition 3
1. On a alors $\overrightarrow{N(t)} = -\sin\alpha(t)\vec{\imath} + \cos\alpha(t)\mathrm{d}t = \vec{v}_{\alpha(t)}$
2. Comme $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$, on en déduit que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \left(= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = \cos\alpha$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

II.4 Courbure

Définition 6
On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1}.

Théorème 3 (Formules de Frenet)
On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

III Enveloppe, développée

III.1 Courbe développée

Définition 7
Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

Proposition 4
Pour une courbe $\mathcal{C}^2$, le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 8
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

Définition 9
Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

III.2 Enveloppe

Définition 10
Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

Proposition 5
Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.