Concours blanc : algèbre

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.**

Partie I : Étude d'une projection orthogonale

Dans cette partie, on travaille dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, noté $\langle , \rangle$. On désigne par $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le vecteur

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{k})$$

On désigne par D la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ et F le plan vectoriel orthogonal à D

1. On note p_D la projection orthogonale sur D et A sa matrice dans la base canonique.
   (a) Que vaut A^2 ?
   (b) Que vaut, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u} - p_D(\vec{u}), \vec{n} \rangle$?
   (c) En déduire que, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $p_D(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \vec{n}$.
   (d) Calculer $p_D(\vec{n})$.
   (e) Rappeler la définition d'un vecteur propre.
   (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de p_D.
   (g) L'endomorphisme p_D est-il diagonalisable ?
   (h) Vérifier que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Reprendre les mêmes questions pour p_F, projection orthogonale sur F, et déterminer sa matrice B dans la base canonique (on pourra dans un premier temps exprimer p_F en fonction de p_D).

Partie II : Une formule de changement de base

On considère toujours l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et on reprend les notations de la partie I. Soit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{k})$, on note D la droite engendrée par $\vec{n}$ et F le plan orthogonal à D, et on note p_D (resp. p_F) la projection orthogonale sur D (resp. F).

1. On pose $\overrightarrow{I} = \frac{p_F(\vec{k})}{\|p_F(\vec{k})\|}$, et on définit le vecteur $\overrightarrow{J}$ de sorte que $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \vec{n})$ soit une base orthonormée indirecte de $\mathbb{R}^3$. Sans calculer les coordonnées de $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$, montrer que

$$\overrightarrow{J} \in F \cap \mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

2. On note P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ vers la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\vec{n})$. Après avoir rappelé ce que représente les colonnes de P, donner l'expression de P.
3. En déduire les expression de $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ en fonction de $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$ et $\vec{n}$, puis celle de $p_F(\vec{\imath}), p_F(\vec{\jmath}), p_F(\vec{k})$ en fonction de $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Son image par p_F a pour coordonnées (X,Y) dans la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ de F. Donner l'expression de X et Y en fonction de x,y et z.

Partie III : Projections orthogonales de l'hélice

On se place désormais dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère dans cet espace l'hélice circulaire (H), dont la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sqrt{2}\sin(t) \\ z(t) = 2\sqrt{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On reprend les notations de la partie précédente :$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{k})$; on désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$. On note (C) l'image de (H) par la projection p.

1. On rappelle que D est la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$, Fest le plan vectoriel orthogonal à D, et p_D et p_F sont les projections orthogonales sur D et F respectivement. On définit les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ comme dans la partie précédente.
   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de la courbe (C) dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est donné par
   $$\begin{cases} X(t) = 2t - \cos(t) \\ Y(t) = \sqrt{2}\sin(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$
   (b) Montrer que tous les points de la courbe (C) sont réguliers.
   (c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   Comment se déduit alors le reste de la courbe à partir de cette restriction ?
   (d) Étudier les variations de X et Y pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Tracer sur le document-réponse joint la courbe (C) pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+3\pi\right]$. La courbe devra être tracée à l'échelle 1.

Partie IV : Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $\langle,\rangle$. On désigne par $\|\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette partie, on appelle projecteur un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p\circ p = p$. Dans ce cas on dit que p projette sur $\ker(p - Id_{\mathbb{R}^n})$ parallèlement à $\ker p$. p est appelé projecteur orthogonal si, et seulement si, $\ker(p - Id)$ et $\ker p$ sont des espaces orthogonaux.

1. Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$, montrer que
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n,\ \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|$$

2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$$
   (b) Montrer que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.
3. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n,\ \|p(\vec{u})\| \leq \|\vec{u}\|$$
   (a) Soit $\vec{x} \in \operatorname{Im} p$ et $\vec{y} \in \ker p$. En considérant le vecteur $\vec{u} = \vec{x} + \lambda\vec{y},\ \lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|\vec{y}\|^2 + 2\lambda\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \geq 0.$$
   En déduire que $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$.
   (b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par
   $$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ f^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(\vec{e}_i), \vec{x}\rangle\vec{e}_i.$$
   (a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En exprimant $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, montrer que, pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
   $$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle\vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle.$$
   (c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle\vec{x}, g(\vec{y})\rangle.$$
   Montrer que $g = f^*$.
5. Soit p un projecteur orthogonal.
   (a) Montrer que, pour tous $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle p(\vec{x}), p(\vec{y})\rangle$.
   (b) En déduire que $p = p^*$.
6. Soit p un projecteur.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} p^* \subset (\ker p)^\perp$.
   (b) Soit $\vec{y} \in (\ker p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\langle\vec{x} - p(\vec{x}), \vec{y}\rangle = 0$.
   En déduire que $\vec{y} = p^*(\vec{y})$ puis que $(\ker p)^\perp \subset \operatorname{Im} p^*$.
   (c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.