Concours blanc : algèbre

Exercice 1

Partie I

1. (a) D'après le cours $A^2 = A$.
   (b) On a $\vec{u} - p_D(\vec{u}) \in F$ (c'est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur F) et donc $< \vec{u} - p_D(\vec{u}), \vec{n} >= 0$.
   (c) D'après la question précédente, et par linéarité à gauche $< \vec{u}, \vec{n} >=< p_D(\vec{u}), \vec{n} >$. De plus, $p_D(\vec{u}) \in D$ et donc il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p_D(\vec{u}) = \alpha\vec{n}$. ON va déterminer ce α.
   On a $< p_D(\vec{u}), \vec{n} >= \alpha < \vec{n}, \vec{n} >= \alpha$ car $\|\vec{n}\|^2 = 1$. Ainsi $p_D(\vec{u}) =< \vec{u}, \vec{n} > \vec{n}$.
   (d) D'après la question précédente, $p_D(\vec{n}) = 1\vec{n} = \vec{n}$.
   (e) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   On dit que x est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ ssi $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$.
   (f) Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{D}$ on a $p_D(\vec{u}) = \vec{u}$ et donc 1 est une valeur propre de p_D, et l'espace propre associé contient D.
   Pour tout $\vec{u} \in F$, $p_D(\vec{u}) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0\vec{u}$ et donc 0 est une valeur propre de p_D et l'espace propre associé contient F.
   Comme deux espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, et par somme des dimensions, on a en fait $E_1(p_D) = D$ et $E_0(p_D) = F$. Ainsi p_D ne peut pas avoir d'autres valeurs propres.
   (g) D'après le raisonnement précédent, la somme directe $\mathbb{R}^3 = D \oplus F$ montre que p_D est diagonalisable.
   (h) On calcule $p_D(\vec{\imath}) =< \vec{\imath}, \vec{n} > \vec{n}$. En notant en colonne les vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a donc $p_D(\vec{\imath}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
   Le calcul est similaire pour $p_D(\vec{\jmath})$ et $p_D(\vec{k})$ et on obtient bien la matrices demandées.
2. On a $p_F + p_D = Id_{\mathbb{R}^3}$ et bonc $p_F = Id_{\mathbb{R}^3} - p_D$.
   On en déduit que $B = I_3 - A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $B^2 = B$ car B est la matrice d'un projecteur. Cette fois, pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, on a $p_F(\vec{u}) = \vec{u}- < \vec{u}, \vec{n} > \vec{n}$.
   p_F est diagonalisable dans la même base que p_D et ses valeurs propres sont aussi 0 et 1 d'espaces propres respectifs D et F.

Partie II

1. Remarquons que $\vec{I} \in F$ par construction et $\vec{I} \wedge \vec{n} = \vec{J}$ car $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ est orthonormée indirecte.
   Ainsi $\vec{J} \perp \vec{n}$ et donc $\vec{J} \in F$. De plus, $p_F(\vec{k}) = \vec{k}- < \vec{k}, \vec{n} > \vec{n}$ et donc $p_F(\vec{k}) \wedge \vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{n}$ par linéarité à gauche. Comme $p_F(\vec{k})$ et $\vec{I}$ sont colinéaires, $\vec{J}$ est colinéaire à $\vec{k} \wedge \vec{n}$ et en particulier $\vec{J} \perp \vec{k}$ ce qui prouve que $\vec{J} \in \mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Les colonnes de P sont les coordonnées respectives de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{n}$ dans la base canonique. On utilise la formule donnée dans la partie précédente pour calculer $p_F(\vec{k})$ et on obtient $\vec{J}$ par produit vectoriel.
   Ainsi $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
3. On cherche en fait P^{-1}. Mais $P \in O_3(\mathbb{R})$ car $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ est une base orthonormée. Ainsi $P^{-1} = {}^tP = P$. On a donc $\vec{\imath} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{I} + \vec{n})$, $\vec{\jmath} = \vec{J}$ et $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} + \vec{n})$.
   Comme $(\vec{I}, \vec{J})$ est une base de F et $\vec{n} \perp F$, on obtient simplement les projections sur F par linéarité en annulant la composante sur $\vec{n}$:
   $$p_F(\vec{\imath}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{I},\ p_F(\vec{\jmath}) = \vec{J},\ p_F(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{I}$$
   Remarque : ceci est cohérent avec les matrices B et P obtenues précédemment.

4. D'après la question précédente,
$$p_F(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}) = (\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{z}{\sqrt{2}})\vec{I}+y\vec{J}$$
et donc $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+z)$ et $Y = y$.

Partie III

1. (a) On applique simplement la formule précédente et on simplifie.

   (b) Les fonctions X et Y sont clairement dérivables et pour $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = 2+\sin(t) \geqslant 1$ et $Y'(t) = \sqrt{2}\cos(t)$. Comme X' ne s'annule jamais, (C) est une courbe régulière.

   (c) Notons $f : t \mapsto \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$. On a déjà, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t+2\pi) = \begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \end{pmatrix} + f(t)$ qui est le translaté de $f(t)$ par le vecteur $\begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ (translation horizontale, comme pour les courbes représentatives de fonctions périodiques).

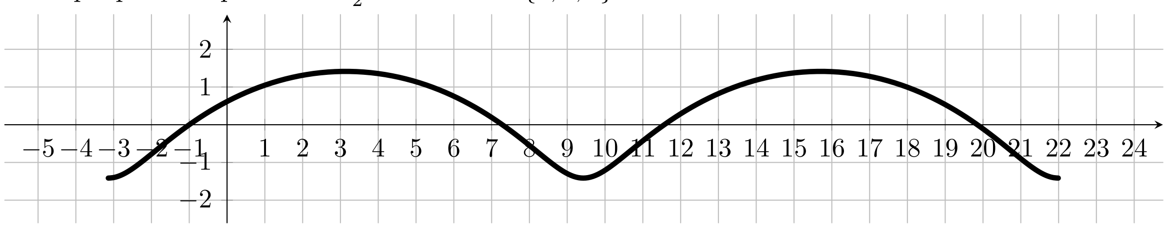
   On peut ainsi étudier f sur un intervalle de longueur 2π puis obtenir le reste de la courbe par translation. On prend $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.[1] Remarquons maintenant que $f(\pi - t) = \begin{pmatrix} 2\pi - X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$. C'est à dire que $f(\pi - t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à la droite d'équation $X = \pi$ (on a obtenu la droite de symétrie comme ensemble des points fixes de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\pi - X \\ Y \end{pmatrix}$).

   De plus, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ssi $\pi - t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et donc on peut étudier (C) sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis effectuer une symétrie axiale et enfin autant de translations que voulu pour obtenir un morceau de (C).

   (d) On a déjà calculé, pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:
$$X'(t) = 2+\sin(t) > 0 \text{ et } Y'(t) = \sqrt{2}\cos(t)$$
   Y' est positive et s'annule seulement aux bornes de notre intervalle. On en déduit les variations.

t	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$X(t)$	$-\pi$	$\nearrow$	π
$Y'(t)$	0	$+$	0
$Y(t)$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

   (e) On se doit d'observer deux tangentes horizontales aux paramètres $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, puis par symétrie et translation à chaque point de paramètre $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \{1,2,3\}$.



Partie IV

1. Pour $\vec{u} \in E$ on a $p(\vec{u} - p(\vec{u})) = p(\vec{u}) - p^2(\vec{u}) = \vec{0}$ et donc $p(\vec{u}) \perp \vec{u} - p(\vec{u})$ d'après la définition donnée des projecteurs orthogonaux. Dans ce cas on a, d'après Pythagore, $\|\vec{u}\|^2 = \|p(\vec{u})\|^2 + \|\vec{u} - p(\vec{u})\|^2$. Comme $\|\vec{u} - p(\vec{u})\|^2 \geqslant 0$, en ajoutant $\|p(\vec{u})\|^2$ à chaque membre, on obtient $\|\vec{u}\|^2 \geqslant \|p(\vec{u})\|^2$ et on conclut par croissance de la racine carrée et le fait que des normes sont positives.

2. (a) — Remarquons que $\dim(\ker p) + \dim(\operatorname{Im} p) = \dim(\mathbb{R}^n)$ d'après le théorème du rang.

1. Totalement au hasard...

— Montrons que $\ker(p)\cap\mathrm{Im}(p)=\{0\}$.
Soit $\vec{u}\in\ker(p)\cap\mathrm{Im}(p)$. Alors, pour un $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}=p(\vec{v})$. De plus, $p(\vec{u})=0=p(p(\vec{v}))=p(\vec{v})=\vec{u}$ car $p^2=p$.
Ainsi $\ker(p)\cap\mathrm{Im}(p)$ est réduit à $\{0\}$.

On a bien $\mathrm{Im}(p)\oplus\ker(p)=\mathbb{R}^n$.

(b) Il faut montrer que $\mathrm{Im}\,p=\ker(p-Id_{\mathbb{R}^n})$.
Soit $\vec{u}\in\mathrm{Im}\,p$. On peut poser $\vec{v}$ tel que $\vec{u}=p(\vec{v})$. Mais alors $p(\vec{u})-\vec{u}=p^2(\vec{v})-p(\vec{v})=\vec{0}$ car $p^2=p$ et on a bien $\mathrm{Im}\,p\subset\ker(p-Id_{\mathbb{R}^n})$.
Réciproquement, si $\vec{u}\in\ker(p-Id_{\mathbb{R}^n})$ alors $p(\vec{u})=\vec{u}$ et on a bien $\vec{u}\in\mathrm{Im}\,p$ par définition de $\mathrm{Im}\,p$. Ceci prouve l'égalité des ensembles considérés et conclut.

3. (a) On a $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{x}\|^2+2\lambda<\vec{x},\vec{y}>+\lambda^2\|\vec{y}\|^2$ (calcul classique par binileárité). De plus, $p(\vec{u})=\vec{x}$ et par hypothèse (et croissance du carré sur $\mathbb{R}^+$) on a donc $\|\vec{x}\|^2\leqslant\|\vec{u}\|^2$ et par soustraction membre à membre on obtient l'inégalité désirée.
Considérons l'expression en λ comme un polynôme de degré 2 (le cas $\vec{y}=\vec{0}$ donnant immédiatement le produit scalaire nul). Ce polynôme ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ et donc s'annule au plus une fois. Comme il s'annule en 0, 0 doit être racine double ce qui signifie (passer au discriminant) $<\vec{x},\vec{y}>=0$.

(b) On vient de montrer que $\ker(p)\perp\mathrm{Im}(p)$ (tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre) et d'après la question 2, p est bien un projecteur orthogonal.

4. (a) Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On a déjà $f^*(x)\in\mathbb{R}^n$ par combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}f^*(\alpha x+\beta y)&=\sum_{i=1}^n<f(e_i),\alpha x+\beta y>e_i=\sum_{i=1}^n(\alpha<f(e_i),x>+\beta<f(e_i,y>)e_i\\&=\sum_{i=1}^n(\alpha<f(e_i),x>e_i+\beta<f(e_i,y>e_i)1=\alpha\sum_{i=1}^n<f(e_i),x>e_i+\beta\sum_{i=1}^n<f(e_i),y>e_i\\&=\alpha f^*(x)+\beta f^*(y)\end{aligned}$$

Ainsi f^* est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(b) Notons $x_1,\dots,x_n$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base canonique.

$$<f(\vec{x}),\vec{y}>=\sum_{i=1}^n x_i<f(\vec{e_i}),\vec{y}>$$

par linéarité de f et du produit scalaire. De plus

$$<\vec{x},f^*(\vec{y})>=\sum_{i=1}^n<f(\vec{e_i}),y><\vec{x},\vec{e_i}>$$

par linéarité à droite du produit scalaire. Il reste à remarquer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ on a $<\vec{x},\vec{e_i}>=x_i$ et la formule est démontrée.

(c) Pour tout $\vec{x},\vec{y}$ on a $<\vec{x},f^*(\vec{y})>=<\vec{x},g(\vec{y})>$ et donc $<\vec{x},f^*(\vec{y})-g(\vec{y})>=0$. On applique, pour un $\vec{y}$ fixé à $\vec{x}=f^*(\vec{y})-g(\vec{y})$ et le caractère défini montre que $f^*(\vec{y})-g(\vec{y})=0$ et finalement on a bien $f^*=g$.

5. (a) Soient $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$. On a $<p(\vec{x}),\vec{y}>=<p(\vec{x}),\vec{y}-p(\vec{y})+p(\vec{y})>=<p(\vec{x}),\vec{y}-p(\vec{y})>+<p(\vec{x}),p(\vec{y})>=<p(\vec{x}),p(\vec{y})>$ car $y-p(\vec{y})\in\ker(p)=\mathrm{Im}(p)^\perp$ et $p(\vec{x})\in\mathrm{Im}(p)$.

(b) On a maintenant, pour tous $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $<p(\vec{x}),\vec{y}>=<p(\vec{x}),p(\vec{y})>$ et $<p(\vec{y}),\vec{x}>=<p(\vec{y}),p(\vec{x})>$ d'après la question précédente. Par symétrie du produit scalaire et d'après 4c, $p=p^*$

6. (a) Soit $\vec{y}\in\mathrm{Im}(p^*)$. On pose $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ tel que $p^*(\vec{x})=\vec{y}$. Soit maintenant $\vec{u}\in\ker(p)$. Il s'agit de montrer que $\vec{y}\perp\vec{u}$. or $<\vec{u},\vec{y}>=<\vec{u},p^*(\vec{x})>=<p(\vec{u}),\vec{x}>=<\vec{0},\vec{x}>=0_{\mathbb{R}}$.
Ainsi tout élément de $\mathrm{Im}(p^*)$ est perpendiculaire à $\ker(p)$ en entier et donc $\mathrm{Im}(p^*)\subset(\ker(p))^\perp$.

(b) Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. $x-p(\vec{x})\in\ker(p)$ d'après la question 1 et donc le produit scalaire indiqué est nul.
On a maintenant $<\vec{x},\vec{y}>=<p(\vec{x}),\vec{y}>=<\vec{x},p^*(\vec{y})>$ ie $<\vec{x},\vec{y}-p^*(\vec{y})>=0$ pour tout $\vec{x}$ et en particulier pour $\vec{x}=\vec{y}-p^*(\vec{y})$ ce qui montre que la norme de ce vecteur est nulle et donc $\vec{y}=p^*(\vec{y})$ c'est à dire que $\vec{y}\in\mathrm{Im}(p^*)$.
Finalement, tout $\vec{y}\in(\ker(p))^\perp$ est élément de $\mathrm{Im}(p^*)$ ce qui prouve l'inclusion demandée.

(c) Si $p^*=p$ alors on a $\ker(p)^\perp=\mathrm{Im}(p)$ d'après les deux inclusions précédentes. Or on a montré que pour un projecteur, $\mathrm{Im}\,p=\ker(p-Id_{\mathbb{R}^n})$ et on retrouve bien la définition d'un projecteur orthogonal du sujet.