# Banque PT 2016 – Épreuve B

## Préliminaires : Questions de cours

1. Soit $\Sigma$ une surface dont un paramétrage de classe $C^1$ est $(u,v) \mapsto M(u,v)$.
   Donner la définition d'un point régulier de $\Sigma$.
2. (a) Donner la définition d'une matrice carrée $Q$ orthogonale.
   (b) Soit $Q$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les natures possibles de l'endomorphisme canoniquement associé à $Q$ ? Quels calculs peut-on effectuer pour distinguer ces différentes natures ? Préciser le lien entre le résultat des calculs et la nature. (On ne demande pas les éléments caractéristiques.)

## Partie I : 2 surfaces

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface $S$ d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

ainsi que la surface $\Sigma$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = (u^2 - v^2)^2 \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,v)$ le point de $\Sigma$ de paramètres $u$ et $v$.

1. *À propos de $S$.*
   (a) Quelle est la nature de l'intersection de $S$ avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
   Qu'en déduit-on pour $S$ ?
   (b) Quelle est la nature de l'intersection de $S$ avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$ ?
   (c) i. Quelle est la nature de l'intersection $\Lambda_\gamma$ de $S$ avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ ? Distinguer différents cas suivant les valeurs de $\gamma$.
   ii. On note $O_\gamma$ le point de coordonnées $(0,0,\gamma)$. Tracer les courbes $\Lambda_\gamma$ dans le repère $(O_\gamma; \vec{i}, \vec{j})$ pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
   On pourra confondre les points $O_\gamma$ et tracer les 3 courbes dans le même repère.
   (d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $S$ en un point $M_0$ de $S$ de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$. Cette équation ne devra pas dépendre de $z_0$.
   (e) Dans le cas particulier où $M_0$ est le point $O$, préciser la position relative de $S$ et du plan tangent.
2. *Comparaison entre $S$ et $\Sigma$.*
   (a) Vérifier que $\Sigma \subset S$.
   (b) A-t-on $\Sigma = S$ ?
3. *À propos de $\Sigma$.*
   (a) Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de $\Sigma$.

(b) Soit $M(u,v)$ un point régulier de $\Sigma$. Déterminer, en fonction des paramètres $u$ et $v$, une équation cartésienne du plan tangent à $\Sigma$ au point $M(u,v)$.

## Partie II : Une famille de courbes

Soit $a$ un réel distinct de 1 et $-1$. On note $A_a(u)$ le point $M(u, au)$ de $\Sigma$ et $\Gamma_a$ l'ensemble des points $A_a(u)$ lorsque $u$ parcourt $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Donner une représentation paramétrique de $\Gamma_a$.
2. (a) Justifier que les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$ engendrent un plan.

   On note alors $P_a(u)$ le plan passant par $A_a(u)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$.

   (b) Justifier, à l'aide de la partie I, l'existence de la normale à $\Sigma$ en tout point $A_a(u)$ de $\Gamma_a$.

   (c) Déterminer $a$ pour qu'en tout point $A_a(u)$ de $\Gamma_a$, la normale à $\Sigma$ en $A_a(u)$ soit incluse dans $P_a(u)$. On donne, si nécessaire, $a^4 + 5a^3 + 6a^2 + 5a + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 + 4a + 1)$.

## Partie III : Autour de $\Gamma_{-2}$

Dans cette partie, nous allons étudier le cas particulier $a = -2$ des courbes $\Gamma_a$ définies dans la partie II.

1. On considère les vecteurs $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\,\vec{i} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\vec{j}$ et $\vec{u} = \vec{k}$.

   (a) Déterminer un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Écrire la matrice de passage $Q_1$ de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage $Q_2$ de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.

   (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $Q_2$.

   (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $Q_1$.
2. Les coordonnées d'un point $M$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(x, y, z)$ et ses coordonnées dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(x', y', z')$. Quelle relation existe-t-il entre la matrice $Q_1$ et les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ?
3. En déduire une représentation paramétrique de $\Gamma_{-2}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Quelle est la nature de $\Gamma_{-2}$ ?

On se place à nouveau dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère le système différentiel

$$S_{-2} \ : \ X' = B_{-2}X \quad \text{où} \quad B_{-2} \ \text{est la matrice} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{4\sqrt{2}}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

On appelle courbe intégrale du système différentiel $S_{-2}$ toute courbe dont une représentation paramétrique est $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t)$, où $X$ est une solution de $S_{-2}$.

4. Soit $x_0$, $y_0$ et $z_0$, trois réels donnés. Que peut-on dire du nombre de solutions de $S_{-2}$ vérifiant $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et $z(0) = z_0$ ?
5. (a) Justifier que $B_{-2}$ est diagonalisable et la diagonaliser. On donnera une matrice diagonale $D$ semblable à $B_{-2}$, la matrice de passage $P$ retenue, ainsi que la relation liant $B_{-2}$, $P$ et $D$ (le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé).
   (b) En déduire les solutions de $S_{-2}$.
   (c) Démontrer que toutes les courbes intégrales de $S_{-2}$ sont planes.
   (d) La courbe $\Gamma_{-2}$ est-elle une courbe intégrale de $S_{-2}$ ?
6. On suppose dans cette question uniquement que $a$ est à nouveau un réel quelconque. Proposer une matrice $B_a$ telle que $\Gamma_a$ soit une courbe intégrale du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = B_a X$.

*La surface $S$ s'appelle paraboloïde hyperbolique ... ainsi que peuvent le suggérer les différentes courbes rencontrées dans ce problème. Elle ressemble à une selle de cheval. Quant au plan $P_a(u)$, il s'agit du plan osculateur à $\Gamma_a$ au point $A(u)$.*