Préambule

L'outil de base, et pourtant parfois délicat à manipuler, en géométrie, est l'équation d'un ensemble de points.

Dire que E est d'équation $f(x,y)=0$ (alors E est un sous-ensemble du plan) signifie que E est composé de tous les points $M=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées vérifient l'équation de E. Évidement, on peut adapter cette définition à l'espace $\mathbb{R}^3$.

De manière évidente, tout ceci n'a du sens que lorsqu'on dispose d'un repère (centre + base) pour exprimer les coordonnées, et l'équation de E dépend fortement du repère choisi pour l'exprimer, même si la forme (l'ensemble des points) ne change pas.

Note sur les outils de calcul

Pour traduire une condition géométrique (distance, appartenance, orthogonalité...) on utilise souvent les outils : vecteurs (directeur, orthogonaux, colinéaires, coplanaires...), distance (via la formule), symétrie orthogonale et rotation.

I Géométrie du plan et de l'espace, PTSI

I.1 Équations, bases

I.1.1 Établir une équation

— De droite dans le plan, connaissant deux points ou un point et un vecteur.

— De plan dans l'espace.

— Attention aux droites dans l'espace qui sont décrites par un système de deux équations.

I.1.2 Représentation paramétrique

On obtient ces représentation facilement en se souvenant, par exemple, que $\text{Vect}(\vec{u})=\{t\vec{u},\ t\in\mathbb{R}\}$.

— Savoir passer d'une représentation paramétrique à une description point(s)-vecteur(s) pour un plan ou une droite.

— Attention aux plans, qui sont des surfaces et sont donc paramétrées comme des nappes, avec deux paramètres.

I.1.3 Intersection

Pour calculer une intersection de droites ou droite/plan on peut :

1. Utiliser une représentation paramétrique de l'un et une équation de l'autre (efficace) : trouver la valeur du paramètre pour le point d'intersection.
2. Utiliser des équations pour chaque objet en résoudre le système.

I.2 Les outils vectoriels

I.2.1 Produit scalaire

Voir le chapitre consacré ! Il caractérise l'orthogonalité.

I.2.2 Déterminant

— Voir le chapitre consacré ! Il caractérise le fait d'être une base pour une famille de n-vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. Attention au fait qu'un déterminant d'une famille de vecteur dépend de la base choisie pour exprimer les coordonnées.

— Le produit mixte : pour deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ou 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant dans une BOND ne dépend pas de la BOND choisie et on peut le noter $[\vec{u},\vec{v}]$ sans préciser la base choisie.

I.2.3 Produit vectoriel

Ne s'utilise que dans $\mathbb{R}^3$.

— Savoir le calculer sur des colonnes.

— Connaître les propriétés de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ par rapport à $\vec{u},\vec{v}$.

— Utilisation sur les vecteurs d'une BOND : Si $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une BOND on a $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$, $\vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath}\dots$. Le produit vectoriel de deux vecteurs d'une BOND, pris dans l'ordre, donne le troisième. Si on inverse l'ordre, le signe change.

I.3 Distance, cercles, sphères

I.3.1 Équations

Pour un cercle comme pour une sphère de centre Ω et rayon R, l'équation est de la forme : $\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$, à traduire sur les coordonnées de M.

I.3.2 Intersections

Savoir décrire l'intersection d'un cercle ou d'une sphère avec une droite, un plan, un autre cercle ou une autre sphère en fonction du ou des rayons et de distances bien choisies.

I.4 Les applications classiques

- Utiliser la colinéarité ou l'orthogonalité : traduction sur des vecteurs bien choisis, utilisation de l'outil vectoriel correspondant.
- Calculer une projection orthogonale (en traduisant deux conditions géométriques : appartenance et orthogonalité).
- Trouver des tangentes ou plan tangents (à une sphère) ayant des propriétés particulières.

I.5 Changement de base, changement de repère

Cadre : on est classiquement dans le repère canonique et on veut exprimer une équation ou une transformation géométrique dans un autre repère.

- Si $\mathcal{B}$ est la base de référence et $\mathcal{B}'$ la base du nouveau repère, la matrice de passage P est $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ ie on exprime les vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.
- Pour obtenir la matrice d'un endomorphisme f dans la nouvelle base, la formule est $M' = P^{-1}MP$ où M est la matrice dans $\mathcal{B}$ et M' la matrice dans $\mathcal{B}'$.

  En terme de coordonnées, les coordonnées de $f(X)$ dans $\mathcal{B}$ sont MX. Dans $\mathcal{B}'$, il s'agit de $M'X'$ où X' est la colonne des coordonnées de X dans $\mathcal{B}'$.
- Si le centre du repère ne change pas, les coordonnées de X dans $\mathcal{B}'$ sont $X' = P^{-1}X$ ou encore $X = PX'$.
- Pour changer le centre du repère, on effectue une translation : $X' = X + \vec{u}$ où $\vec{u}$ est fixé de telle manière que $X' = 0$ ssi X est au centre du nouveau repère.

Une application classique : trouver une équation réduite de conique. Dans ce cas on ne permet que des changement de repères orthonormés directs (ie $P \in SO_2(\mathbb{R})$) ou par translation.

II Courbes paramétrées

II.1 Étude de courbe

Savoir faire une étude :

- Trouver des symétries et réduire éventuellement le domaine d'étude.
- Étudier les variations des fonctions coordonnées et savoir les interpréter (vers le haut/bas/gauche/droite pour la courbe, dans le sens de parcours).
- Savoir étudier les tangentes : trouver un vecteur directeur (la vitesse), puis éventuellement une équation (on connaît un point et un vecteur directeur, voir méthode de sup).
- Savoir étudier les branches infinies : la définition donne les étapes de la méthode.

II.2 Métrique des courbes

Ici, a priori pour les calculs, on fixe un point $M(t)$ de la courbe à étudier et tous les objets présents dépendent de t (ie du point $M(t)$ que l'on est en train d'étudier.)

Il s'agit de connaître la définition et de savoir calculer :

- le repère de Frenet.
- courbure en un point (formules de Frenet)
- cercle de courbure (on connaît le rayon, un point et la direction vers le centre ($\overrightarrow{N(t)}$)).

II.3 Enveloppe, développée

— calcul de l'enveloppe d'une famille de droites. On donne une droite par valeur d'un paramètre (noté souvent t). Pour chaque droite on trouve un point $M(t)$ sur cette droite. L'ensemble des points trouvés forme la courbe enveloppe.

— On peut éventuellement calculer la courbe développée en tant qu'enveloppe des normales, c'est la bonne méthode lorsqu'on a pas calculé la courbure en tout point.

III Transformations géométriques

Ici, on s'intéresse aux opérations linéaires qui transforment un vecteur en un autre.

III.1 Dans le plan

— Les rotations sont facile à étudier : la matrice ne dépend pas de la BOND choisie. On peut lire directement $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

— Les seules symétries orthogonales intéressantes sont les réflexion (par rapport à un axe, à trouver comme ensemble des points fixes) et la symétrie centrale de centre O qui est $-Id$.

III.2 Dans l'espace

III.2.1 Étude d'une matrice

Le cadre classique est l'étude d'un endomorphisme canoniquement associé à une matrice A.

— On vérifie que A est orthogonale.

— Si elle est symétrique en plus, c'est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des points fixes ($E_1(A)$).

— Sinon et si $\det(A) = +1$, c'est une rotation. L'axe est l'ensemble des points fixes. Si on choisi d'orienter l'axe par u tel que $D = \mathrm{Vect}(u)$ est l'axe de rotation, l'angle $\theta \in [-\pi, \pi]$ vérifie : $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(A)$ et $\theta = \pm \arccos(\dots)$. Le signe est le même que $[u, v, Av]$ où v est un vecteur en dehors de l'axe (calcul du produit mixte, ie déterminant dans une BOND, par exemple la base canonique).

— Si A n'est pas symétrique et $\det(A) = -1$, c'est la composée (commutative : on peut appliquer la rotation en premier ou en deuxième et obtenir le même résultat, tester dans le plan, ce n'est pas toujours le cas) d'une rotation et d'une réflexion dont le plan est orthogonal à l'axe de rotation. La matrice réduite est de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ainsi $-A$ est associée à la rotation de même axe et d'angle $\theta \pm \pi$.

III.2.2 Écriture de matrices

— Pour une rotation r de l'espace, la matrice est réduite ssi on l'exprime dans une BOND dont le premier vecteur est directeur et oriente l'axe.

Savoir en déduire la matrice dans une autre base.

— Pour une symétrie orthogonale par rapport à un plan de de coordonnées ((xOy) ou (yOz) ou (xOz)), savoir écrire la matrice dans la base canonique. De même pour les symétries par rapport aux axes de coordonnées.

III.3 Projection et symétrie

— Grâce à la formule $s = 2p - Id$ (que l'on peut retrouver sur un schéma), il suffit de calculer une projection pour en déduire la symétrie associée. remarquez qu'on a aussi $p = \frac{s+Id}{2}$ si jamais on donne la symétrie dans l'énoncé.

— Les symétries sont caractérisées par : f est linéaire et $f^2 = Id$ (ie $f = f^{-1}$, en appliquant deux fois la même symétrie on retombe sur le vecteur de départ)

— Les projecteurs sont caractérisés par : f est linéaire et $f^2 = f$ (projeter un vecteur une deuxième fois n'a pas plus d'effet : on est déjà dans l'espace cible).

— Pour la matrice d'une projection p (sur F parallèlement à G), on calcules les coordonnées de $p(X)$ (où X est la colonne des coordonnées dans la base choisie, souvent la base canonique) en traduisant deux conditions géométriques : $p(X) \in F$ et $X - p(X) \in G$ (ce qui peut se traduire par une orthogonalité si p est un projecteur orthogonal).

— Pour la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}(u)$, on a le cas particulier de la formule générale : SI $\|u\| = 1$ ALORS $\forall x \in Ep_D(x) =< x, u > u$.

— Connaître les vecteurs propres et valeurs propres associés.

III.4 Bases orthonormées

— Une famille orthonormée est libre. Si elle a le bon nombre de vecteur, en dimension finie, c'est une base (orthonormée).

— Les isométries sont les applications linéaires qui transforment une BON en une autre BON (l'orientation est conservée ssi cette isométrie est une rotation du plan ou de l'espace).

— Une matrice dont les colonnes forment une BON est canoniquement associée à une isométrie.

— Pour construire une BON, on pensera au produit vectoriel (dans $\mathbb{R}^3$ uniquement), ou à Gram-Schmidt.

IV Surfaces

IV.1 Plan tangents

Dans chaque cas, si la méthode données fourni bien un plan (vecteur normal non nul, vecteurs de base non colinéaires) on dit que le point est régulier.

— Pour une surface représentative (donnée par une équation explicite) d'équation $z = f(x, y)$, on applique la formule du cours, ou le point suivant. Tous les points sont réguliers.

— Pour une surface "implicite" d'équation $f(x, y, z) = 0$. En un point fixé (x_0, y_0, z_0) qui vérifie l'équation, on calcule le gradient de f qui donne un vecteur normal au plan tangent cherché. On connaît un point (le point fixé) et un vecteur normal. Retour à la sup si on cherche autre chose.

— Pour une nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto M(u, v)$ les deux dérivées partielles, évaluée en un point fixé (u_0, v_0), donnent une base du plan tangent et $M(u_0, v_0)$ en est un point.

IV.2 Paramétrage et équation

— Pour trouver une équation d'une surface paramétrée, on tente à partir des équations $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ (qui traduisent la condition géométrique $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$) de trouver UNE équation qui ne fait plus apparaître u ni v. Si on peut exprimer un ou deux paramètres en fonction des coordonnées, le travail est facilité.

— Pour trouver un paramétrage d'une surface donnée par une équation cartésienne c'est plus difficile. Voir quelques exemples en cours.

Dans tous les cas, on pourra utiliser le théorème : si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin\theta$. L'interprétation géométrique est très simple : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est de norme 1 (le point est sur le cercle trigo) et θ est l'angle correspondant (entre $\vec{\imath}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où $\vec{\imath}$ dirige (Ox)).

On peut considérer ce théorème comme la réciproque de la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

IV.3 Surfaces réglées

— deux méthodes pour montrer que S est réglée :

1. Revenir à la définition et montrer que $S = \bigcup_{t \in I} \mathcal{D}_t$ (S peut s'écrire comme réunion d'une certaine famille de droites).
2. Sous forme paramétré on doit avoir $M(k, t) = A(t) + k\vec{u}(t)$: un des deux paramètres (ici k) n'apparait que comme facteur d'une colonne et nulle part ailleurs.

— Cas particuliers : cône où $A(t)$ est en fait un point fixe (ne dépend pas de t) et cylindres où $\vec{u}(t)$ est constant (ne dépend pas de t).

IV.4 Surfaces de révolutions

On fait tourner la courbe Γ autour de l'axe (Oz). Notons S la surface obtenue.

— Dans tous les cas, le raisonnement commence par : $M \in S$ ssi il existe $M_0 \in \Gamma$ tel que $z = z_0$ et $d(M, (Oz)) = d(M_0, (Oz))$.

— Dans le cas où Γ est donnée sous forme paramétrée, on peut trouver une forme paramétrée pour S en passant par les coordonnées cylindrique.

— Dans le cas où Γ est donnée par un système d'équation cartésienne, on peut exprimer l'égalité des distances par $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ et ensuite on utilise les équations de Γ pour éliminer les coordonnées x_0, y_0. On trouve ainsi une équation cartésienne de S.

IV.5 Projection d'une courbe sur un plan

Il y a deux cas de figure suivant la méthode de définition de la courbe dans l'espace.

1. Si la courbe est donnée par un paramétrage, il suffit d'appliquer la projection sur les coordonnées paramétrée pour obtenir un paramétrage de la courbe projetée.
2. Dans le cas où la courbe est donnée par un système d'équations cartésienne, on tente d'éliminer une coordonnées (par exemple pour projeter sur (xOy) on tente d'éliminer z) d'une des deux équations en utilisant l'autre. On représente ainsi la courbe par l'intersection avec un cylindre perpendiculaire au plan de projection et la description est maintenant plus facile : dans tout plan parallèle au plan de projection la courbe est la même.