Préambule

Dans les exercices d'algèbre on manipule très souvent des ensembles. Si A et B sont des ensembles il faut savoir :

— traduire $x \in A$ suivant la manière dont est donné l'ensemble A : par une définition du cours, par compréhension ($A = \{x \mid x \text{ vérifie une certaine propriété}\}$)

— comment on montre que $A \subset B$

— si on on montré seulement une inclusion ou l'égalité de deux ensembles, en particulier lorsqu'on cherche à résoudre une équation.

I Nombres complexes, PTSI

I.1 Formes des nombres complexes

I.1.1 Changement de forme

— Savoir écrire la forme algébrique ou exponentielle d'un nombre donné.

— Connaître l'écriture théorique de chaque forme, attention à 0 qui n'a pas UNE forme exponentielle.

— Utiliser l'unicité pour la forme algébrique, attention aux arguments pour la forme exponentielle.

— Calcul du conjugué et du module dans chaque cas.

— Formules d'Euler.

I.1.2 Choisir la bonne forme

— Pour le calcul de somme, la forme algébrique est plus adaptée

— Pour le calcul de produits et de quotients, on peut passer à la forme exponentielle.

I.2 Utilisation calculatoire

I.2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

— Connaître la forme (on prend $n \geqslant 2$) : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

— Elles vérifient l'équation $z^n = 1$.

— La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (et de n'importe quel complexe) est nulle : lien avec les relations coefficients-racines de $X^n - 1$.

— Méthode de l'angle moitié.

I.2.2 Calcul de somme et d'intégrale

— Utilisation de $e^{iak} = \left(e^{ia}\right)^k$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$ (et seulement dans ce cas) pour reconnaître des sommes géométriques.

— Utilisation des parties réelles et imaginaires de $e^{i\theta}$ pour le calcul d'intégrale ou de sommes trigonométriques.

I.2.3 Résolution d'équations de degré 2

— Racines conjuguées dans le cas d'une équation à coefficients réels et discriminant strictement négatif.

— Calcul sous forme algébrique ou exponentielle d'une racine carrée du discriminant lorsque qu'il n'est pas réel (les coefficients sont des complexes non réels).

II Polynômes, PTSI

II.1 Manipulations algébriques

— Degré et coefficient dominant d'une somme, d'un produit.

— Division euclidienne de deux polynômes. Application à la factorisation.

— Unicité des coefficients d'un polynôme, d'une expression polynomiale définie sur une infinité de valeurs.

— ne pas écrire $X = 0$ (ou tout autre constante) qui est l'égalité entre deux polynômes. On utilise l'évaluation, qui est une opération linéaire.

II.2 Racines

II.2.1 Factorisation

- Lien entre α est racine de P et la factorisation de P par $X - \alpha$.
- Caractérisation par la dérivation des racines multiples.

II.2.2 Résultats théoriques

- Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant (à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) possède exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) que son degré (il est scindé).
- Factorisation complète d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: connaître la forme (attention à ne pas oublier le coefficient dominant), la méthode pour déduire la factorisation réelle.
- Relations coefficients-racines : pour un polynôme de coefficient dominant égal à 1 et degré $n \geqslant 1$, le coefficient de X^{n-1} est l'opposé de la somme des racines et le coefficient constant est $(-1)^n$ fois le produit des racines.
  Quand le polynôme considéré n'est pas de coefficient dominant égal à 1, on commence par factoriser par ce coefficient dominant.

III Espaces vectoriels et applications linéaires

III.1 Espaces vectoriels

III.1.1 Familles

- Familles libres : exemples de référence, méthode pour prouver qu'une famille est libre (suivre la définition). La liberté de 3 vecteurs n'est PAS le fait d'être 2 à 2 non colinéaires.
- Familles génératrices : idem.
- Bases : idem.
- Dans un espace de dimension n, une famille de n vecteurs est libre ssi elle est génératrice.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base : définition théorique, savoir les trouver en pratique.
- Théorème de la base incomplète.

III.1.2 Sous-espaces

- Méthode pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E (un espace de référence/connu).
- Égalité de deux espaces : inclusion + égalité des dimensions.
- Espaces supplémentaires, espaces en somme directe : définition, caractérisation générale, théorème de la base adaptée. Dimension d'une somme directe.

III.2 Applications linéaires

- Définition, utilisation pour calculer l'image d'une combinaison linéaire (entre deux vecteurs, ou sous forme de somme).
- Applications linéaires classiques : dérivation, intégration sur un segment fixé, évaluation d'une fonction ou d'un polynôme, identité, homothétie, projection, symétrie.
- Noyau et image : définitions, lien avec l'injectivité et la surjectivité.
- Théorème du rang.
- Caractérisations de la bijectivité : l'image d'une base est une base, injectivité ou surjectivité + égalité des dimensions.

IV Matrices, déterminants

IV.1 Espace des matrices

IV.1.1 Opérations

- $\mathcal{M}_{n,p(\mathbb{K})}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$, combinaison linéaire de matrices de même taille.
- Produit matriciel entre matrices compatibles. Produit d'une matrice par une colonne (dans cet ordre) : interprétation en tant que combinaison linéaire des colonnes.

— Transposition, lien avec les combinaisons linéaires (linéarité de la transposition) et avec le produit (inverse l'ordre).

— Puissances de matrices carrées, cas particulier $M^0 = I_n$. Cas particulier : matrices triangulaires ou diagonales.

— Rang d'une matrice en tant que nombre de pivots dans la matrice échelonnée réduite. $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$.

— $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

IV.1.2 Matrices inversibles

— Calcul en pratique de l'inverse.

— Utilisation de la définition pour montrer l'inversibilité (par exemple lorsque $M^2 + 2M - I_2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, montrer que M est inversible).

— Utilisation pour exprimer l'unique solution d'un système linéaire.

— Lien avec le rang.

IV.2 Matrices représentant un objet

IV.2.1 Matrice d'une famille dans une base

On considère $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ où $\mathcal{B}$ est une base d'un espace E.

— Construction effective par calcul des coordonnées des vecteurs représentés dans la base choisie.

— Interprétation du rang comme dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ ie. le rang le la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. On en déduit (en utilisant la base canonique de K^n) que le rang d'une matrice est également la dimension de l'espace engendré par ses colonnes.

— Si M est carrée ($\dim(E) = p = \mathrm{Card}(u_1, \ldots, u_p)$), M est inversible ssi $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base. M est alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la nouvelle base $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_p)$.
Pour $x \in E$ on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ que l'on note souvent $X = PX'$ où X représente la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' celle dans $\mathcal{B}'$.

IV.2.2 Matrice d'une application linéaire

Cette fois $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ où $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ sont des bases de E et F respectivement.

— Construction en pratique : on calcule les coordonnées de $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, le cas le plus courant des endomorphismes étant $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$.

— $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$. Lien entre le théorème du rang et le nombre de pivots de M, les inconnues principales et paramètres d'un système de matrice M.

— Calcul de $\ker(f)$ en calculant d'abord $\ker(M)$: on traduit les colonnes obtenues qui sont des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$.

IV.2.3 Matrice d'un endomorphisme

On prend le cas particulier (par rapport au point précédent), $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$.

— Matrice canoniquement associée à une endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à une matrice.

— f est bijective ssi M est inversible.

— Changement de base. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'$ alors on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$ que l'on note souvent $M' = P^{-1}MP$ ou encore $M = PM'P^{-1}$.

— $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(M')$.

IV.3 Déterminant

Ici toutes les matrices sont forcément carrées.

IV.3.1 Calculs

- Propriétés calculatoires : effet des opérations élémentaires (attention à la multiplication d'une colonne/ligne), factorisation d'UNE ligne ou colonne, invariance par transposition, nul si la famille des colonnes/ligne est liée (en particulier si une colonne est nulle ou deux colonnes proportionnelles).
- Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant triangulaire : il vaut le produit des coefficients diagonaux.
- $\det(M) \neq 0$ ssi M est inversible.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

IV.3.2 Déterminant d'une famille, d'un endomorphisme

- Le déterminant d'une famille (préciser la base utilisée pour construire la matrice) est non nul ssi cette famille est une base.
- Le déterminant d'un endomorphisme f ne dépend pas de la base choisi pour exprimer la matrice de f et est non nul ssi f est bijective.
- Orientation d'une base du plan et de l'espace : c'est le signe du déterminant dans la base canonique (ou dans une BOND) qui la donne.

V Réduction, diagonalisation

On se place ici en dimension finie exclusivement.

V.1 Éléments propres

V.1.1 Pour une matrice

On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée

- Les vecteurs propres de M sont les colonnes $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ telles qu'il existe un scalaire λ (appelé valeur propre associée) tel que $MX = \lambda X$.
- Les espaces propres de M sont les $\ker(M-\lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - M)$, ensembles des solutions de l'équation $MX = \lambda X$ où λ est une valeur propre et X une colonne.
- Un espace propre est de dimension au moins 1.
- Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M ssi $\chi_M(\lambda) = 0$ (λ est une racine de M)
- Les espaces propres sont en somme directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre (des vecteurs propres sont forcément non nuls, rappelons le).
- Théorème du rang : $\dim(\ker(M - \lambda I_n)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$.
- Savoir montrer que si $MX = \lambda X$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $M^k X = \lambda^k X$

V.1.2 Pour un endomorphisme

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Vecteurs propres et valeurs propres : $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E,\ x \neq 0_E$.
- $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f)$ sont les espaces propres.
- On a les mêmes propriétés des espaces propres, polynôme caractéristique, théorème du rang... que pour les matrices.

V.2 Réduction

V.2.1 Diagonalisation

On énonce les propriétés pour une matrice M, on peut les traduire mot pour mot pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (en dimension finie).

- Définition de M est diagonalisable : il existe une matrice D diagonale semblable à M.
- Définition de f est diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale ie $\mathcal{B}$ est composée de vecteurs propres de f.

— M est diagonalisable ssi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(M)} E_\lambda(M)$.

— M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour chaque racine λ, $\dim(\ker(M - \lambda I_n))$ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_M.

— SI χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples, ALORS M est diagonalisable.

— Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique (et à coefficients réels) alors M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux et on **peut** trouver une base orthonormée de vecteurs propres ie une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP$ est diagonale.

V.2.2 Trigonalisation

Cette fois on énonce les propriétés pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

— Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ alors on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, avec sur sa diagonales les racines de χ_f

— Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes les racines complexes de χ_f (avec multiplicité, un même nombre peut apparaître plusieurs fois. Le théorème de d'Alembert-Gauss nous assure que χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$). Alors

$$\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \text{ et } \operatorname{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

— On en déduit que $\chi_f(x) = x^n - \operatorname{tr}(f)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$ lorsque $n \geqslant 2$.