Lois usuelles

Exercice 1
Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre huit.

1. Déterminer la probabilité des événements :
   (a) Huit voitures ont été vendues en une semaine.
   (b) Au moins deux voitures ont été vendues en une semaine.
2. Plus de huit voitures ont été vendues en une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu douze ventes ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu au moins six et au plus dix voitures vendues en une semaine ?
4. Quelle est la probabilité qu'on vende moins de seize voitures en une semaine, sachant qu'on en vendra plus de huit ?

Exercice 2
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre λ et μ. Calculer la loi de X sachant $X+Y=n$ (n fixé).

Exercice 3
On lance une pile non symétrique, qui a une probabilité $p\in]0,1[$ de tomber sur pile. Dans un premier temps on lance la pièce jusqu'à obtenir pile et on note N le nombre de lancers nécessaires.

Dans un second temps, on lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette série de lancers

1. Préciser la loi de N.
2. Préciser la loi conditionnelle de X sachant $N=n$.

Applications directes

Exercice 4
Soit $a\in\mathbb{R}$; soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que
$\forall(k,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=j))=\dfrac{a}{2^{k+1}j!}$.

1. Déterminer a.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5
Soit $X\sim\mathcal{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 6
On lance deux dés à 6 faces simultanément.
Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le minimum des deux chiffres obtenus.
On pourra calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X\geqslant k)$.

Exercice 7
Une personne, appelée X, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur la consommation de chocolat, décide d'arrêter. Les probabilités suivantes sont estimées :

- Si X a consommé du chocolat un jour J_n, alors la probabilité qu'elle n'en consomme pas le jour suivant J_{n+1}, est 0,9.
- Si X n'a pas consommé de chocolat un jour J_n, alors la probabilité qu'elle n'en consomme pas le jour suivant J_{n+1}, est 0,3.

1. Pour n entier strictement positif, on note P_n la probabilité que X consomme du chocolat le jour J_n.
   Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
2. Quelle est la limite de P_n ? X va-t-elle réussir à s'arrêter ?

Exercice 8
On effectue des tirages dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire :

- si on tire une boule noire, on arrête ;
- si on tire une boule blanche, on la remet et on ajoute une autre boule blanche.

Soit X le rang d'obtention de la boule noire.

Calculer $\mathbb{P}(X=n)$ pour $n\in\mathbb{N}$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)$.

Exercice 9
On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n ; la boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule de cette boîte. Soient X le numéro de la boîte, et Y celui de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10
Dans la forêt de Palombie, le Marsupilami a le choix entre trois zones de pêche, notées A, B et C, pour trouver des piranhas.
A l'instant 0, il se trouve en A. Quand il a trouvé un poisson dans une zone, il peut y rester avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou la quitter pour une des deux autres zones, de façon équiprobable.
Quand $n\in\mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le Marsupilami est en A après son $n^{\text{ème}}$ poisson » ;
- B_n l'événement « le Marsupilami est en B après son $n^{\text{ème}}$ poisson » ;
- C_n l'événement « le Marsupilami est en C après son $n^{\text{ème}}$ poisson ».

Enfin, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier (sans calculs) que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $\frac{1}{4}$ est valeur propre de A, et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer comment les résultats de le question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n, b_n, c_n)$.

Plus délicat

Exercice 11

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On tire simultanément 2 boules, et on note X la variable aléatoire représentant le plus petit des deux nombres obtenus. Déterminer la fonction de répartition F de X, puis la loi de X.

Reprendre l'exercice dans le cas où on tire 3 boules.

Exercice 12

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P), mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)).$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$.
   En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 13 (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$)

Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire.

Montrer que N est d'espérance finie $\Leftrightarrow$ la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$ converge,

et que, dans ce cas, $E(N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$.