Entrainement

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, en précisant s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, d'une partie bornée (ou rien de tout ça !).

Représenter ces domaines de définitions avec la convention de tracer en traits pleins les frontières incluses et en pointillés les frontières exclues.

$f_1 : (x,y) \mapsto \ln(xy)$ $\quad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ $\quad f_3 : (x,y) \mapsto \arcsin(|x+y|)$

Exercice 2
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \cos(x-y) \end{array} \right.$. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.

Exercice 3
Soit $f : (x,y,z) \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(y) + z^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer son développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $a = (x_0, y_0, z_0)$ fixé.

Exercice 4
Justifier que $f : (x,y) \mapsto \arctan(\frac{y}{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et calculer son gradient. Interpréter géométriquement sa direction et sa norme par rapport au vecteur de coordonnées (x,y).

Exercice 5
Soit $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $F : (x,y) \mapsto f(x + \varphi(y))$. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert à déterminer et établir l'égalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Intégrale à paramètre

Exercice 6
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On pose $D = [a,b] \times [0\frac{\pi}{2}]$ On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \cos(x \sin(t)) \end{array} \right.$

1. Montrer que φ est continue sur son domaine de définition.
2. Justifier qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall (x,t) \in D\ |\varphi(x,t)| \leqslant M$.
3. En déduire, rapidement, que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ est une fonction continue sur $[a,b]$.

Exercice 7
Justifier que $\varphi : (x,t) \mapsto \frac{\cos(t)}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ où $a > 0$ et $b > a$.

En déduire que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,t)$ est dérivable sur $[a,b]$ puis dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

EDP

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{array} \right.$.

Exercice 9
A l'aide d'un changement de variable linéaire, résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ d'inconnue f, une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On exprimera f en fonction des variables x et y.

Exercice 10
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.

On dit que f est harmonique ssi $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. (son laplacien est nul).

1. Montrer que si f est harmonique alors $g_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $g_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $g_3 : (x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. Dans cette question, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
   On suppose que f peut s'écrire sous la forme
   $$f(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$$
   avec $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
   Montrer que la fonction f est harmonique ssi φ vérifie une équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 11
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ invariante par translation, c'est à dire qui vérifient

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie l'hypothèse précédente.
   (a) Montrer que f vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Indication : on pourra fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) On effectue le changement de variable $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x-y$. Trouver une équation aux dérivées partielles simple vérifiée par g, puis déterminer g et enfin f.
2. Conclure.

Extrema

Exercice 12
Soit $f : (x,y) \mapsto y^2 - x^2y + x^2$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

1. On note Γ la frontière de D. Représenter D et Γ graphiquement.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Trouver le maximum et le minimum de f. Pour étudier f sur Γ, on introduira deux fonctions d'une variable.

Exercice 13
Déterminer les extrema locaux de $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto x \ln\left(x^2\right) + y^2$.

Exercice 14

1. Montrer que $(E) : e^{-x} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_0.
2. En déduire que $f : (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ admet un unique extremum, dont on donnera la nature, atteint en un unique point dont on exprimera les coordonnées à l'aide de x_0.

Exercice 15
On pose $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } z \geqslant 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$.

1. On souhaite calculer $\max\limits_{(x,y,z) \in K} (xyz)$. Transformer l'égalité et la condition sur z dans la définition de K pour introduire un sous-ensemble Δ et une fonction de deux variables à étudier pour répondre à la question.
2. Calculer le maximum demandé.
3. Soient x, y, z des réels positifs tels que $x + y + z \neq 0$. Montrer que $(xyz)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$. On pourra introduire, entre autre $X = \frac{x}{x+y+z}$.

Question bonus : citer l'inégalité classique qui correspond dans le cas de 2 réels positifs.

Exercice 16 (Bonus)
Une deuxième méthode pour traiter l'exercice précédent.

1. Soit $\lambda \in [0,1]$ et $x, y > 0$. Montrer que $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$. L'interprétation géométrique est simple : Le segment reliant $\begin{pmatrix} x \\ \ln(x) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y \\ \ln(y) \end{pmatrix}$ est en dessous de la courbe représentative de ln.
2. Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Soit également $x_1, \ldots, x_n > 0$ Montrer que
$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)$$
3. Avec les notations précédentes, montrer que $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$
4. Retrouver le résultat de l'exercice précédent, et le généraliser.

Exercice 17
On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soient A le point de coordonnées $(a,0)$ et B le point de coordonnées $(0,b)$.

On désigne par $f(x,y)$ le carré du produit des distances du point M de coordonnées (x,y) à chaque côté du triangle ABO.

Déterminer le maximum de f à l'intérieur du triangle ABO, côtés exclus.