La question : pouvons-nous préciser la démarche pour calculer la projection d'une courbe sur un plan de coordonnées ?

L'exemple : on considère la courbe Γ donné par un système d'équation valable pour un $a > 0$, $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 - ax + y^2 = 0 \end{cases}$.
Calculer la projection de Γ sur la plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 0$.

Un piège facile et classique : il ne s'agit pas de calculer une intersection, qui consisterait à ajouter l'équation $z = 0$ au système, ou, de manière équivalente, à remplacer z par 0 dans les équations précédentes.

Pourquoi ce n'est pas immédiat : si on disposait d'une paramétrisation de Γ, alors on aurait une description exacte de tous les points de cette courbe et il suffirait de calculer la projection de chacun de ses points (ici, remplacer la cote par 0) pour obtenir une paramétrisation de la projection.

Une solution directe : On utilise les coordonnées cartésiennes. Comme à chaque fois qu'on étudie un "lieu" géométrique, c'est à dire un ensemble de points, il s'agit de donner une CNS (ssi) pour l'appartenance à cet ensemble

Soit $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un points quelconque. Notons C la courbe projetée de Γ que le plan $\mathcal{P}$. On a alors (en notant que z est forcément égal à 0 pour que M ait une chance d'appartenir à C)

$M \in C \iff M$ est le projeté orthogonal de l'un des points de $\Gamma \iff$ il existe $M_0 \in \Gamma$ tel que M est le projeté de M_0 sur $\mathcal{P}$.

Ainsi $M \in C \iff$ il existe $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ tel que $z = 0$ et $x = x_0$ et $y = y_0$ (pour l'instant on ne voit pas vraiment ce qui empêche un tel M_0 d'exister) $\iff \exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $x = x_0$ et $y = y_0$ et $x_0^2+y_0^2+z_0^2 = a^2$ et $x_0^2-ax_0+y_0^2 = 0$ et $z = 0$ (on a changé la condition d'appartenance de M_0 pour traduire la définition de Γ) $\iff \exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $x = x_0$ et $y = y_0$ et $z_0^2 = a^2 - x_0^2 - y_0^2$ et $x^2 - ax + y^2 = 0$ et $z = 0$.

Remarquons à ce stade que la dernière condition donnée ne dépend pas de x_0, y_0, z_0. Ainsi

$$M \in C \iff x^2 - ax + y^2 = 0 \text{ et } \exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; x_0 = x \text{ et } y_0 = y \text{ et } z_0^2 = a^2 - x_0^2 - y_0^2 \text{ et } z = 0$$

Dans le membre de droite, l'existence de x_0 et y_0 ne pose aucun problème (car x et y ont été définis avant de se poser la question de l'existence). Seule l'existence de z_0 est conditionnée par les valeurs de x et y. Un z_0 existe ssi $a^2 - x^2 - z^2 \geqslant 0$ (et d'ailleurs on a deux choix en général, sauf pour $z_0^2 = 0$).

Ainsi $M \in C \iff x^2 - ax + y^2 = 0$ et $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ et $z = 0$, qui nous donne une CNS sur les coordonnées cartésiennes de M, qu'on appelle une équation (ou ici un système).

Un peu de géométrie élémentaire nous indique que l'équation précédente est celle du cercle de (xOy) de centre $(a/2, 0, 0)$ et de rayon $a/2$ dont tous les points vérifient $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ (interpréter les équation/inéquations en terme de normes). Ainsi, la projection cherchée est le cercle que l'on vient de décrire.

Via une paramétrisation : on se sert de la remarque précédent la première solution : cherchons une paramétrisation de Γ.

Commençons par remarquer que pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a $x^2 - ax + y^2 = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + y^2$ et donc

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \iff (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2 \iff \exists t \in [0, 2\pi] \; x = \frac{a}{2}\cos t \text{ et } y = \frac{a}{2}\sin t$$

Ainsi $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma \iff \exists t \in [0, 2\pi] \begin{cases} x = \frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z^2 = a^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$ On travaille juste sur la dernière équation pour l'instant. On a $z^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}(1 + \cos t)^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2 t = a^2 - \frac{a^2}{4}(1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{a^2}{2}(1 - \cos(t)) = a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$.

Donc $M \in \Gamma \iff \exists t \in [0, 2\pi] \begin{cases} x = \frac{a}{2}(1+\cos(t)) \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = \pm a \sin\frac{t}{2} \end{cases}$ Or $z = -a\sin\frac{t}{2} \iff z = a\sin(\frac{t}{2}+\pi) = a\sin\frac{t+2\pi}{2}$. Ainsi il existe forcément un $\theta \in [0, 4\pi]$ tel que $z = a\sin\frac{\theta}{2}$ et $x = \frac{a}{2}(1+\cos(\theta)), y = \frac{a}{2}\sin\theta$.

Finalement, une paramétrisation de Γ est $\begin{cases} x = \frac{a}{2}(1+\cos(\theta)) \\ y = \frac{a}{2}\sin\theta \\ z = a\sin\theta \end{cases}$ $, \theta \in [0, 4\pi]$ et une paramétrisation de sa projection sur (xOy) est donnée par les deux premières coordonnées. On retrouve bien le cercle précédent.