La question : On prend $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres distincts deux à deux, $b_0, \ldots, b_n$ des nombres quelconques et on cherche un polynôme P de degré maximal n tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \; P(a_i) = b_i$$

Ainsi, on impose $n+1$ valeurs et on va trouver un unique polynôme de degré n ou moins.

Réponse partielle, les polynômes de Lagrange On va commencer par construire des polynômes $L_0, \ldots, L_n$ de degré n et qui vérifient

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \forall i \in [\![0, n]\!] \; L_k(a_i) = \delta_{i,k}$$

ou encore L_k a tous les a_i comme racines sauf a_k où on a $L_k(a_k) = 1$.

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$ pour l'instant. On sait que $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!], i \neq k}$ sont des racines de L_k et donc la factorisation de L_k peut s'écrire

$$L_k = \alpha_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

où α_k est le coefficient dominant de L_k et on voit apparaître toutes les racines de L_k (les a_i avec $i \neq k$). Ainsi L_k est bien de degré n avec n racines simples (car les a_i sont distincts deux à deux, ce qui justifie que L_k est forcément de cette forme).

Il reste à calculer α_k grâce à la dernière équation $L_k(a_k) = 1$ et un calcul simple montre que $\alpha_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ (et encore une fois on utilise le fait que les a_i sont deux à deux distincts pour justifier que le dénominateur n'est pas nul).

Finalement

$$L_k(X) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$$

On a écrit une fraction, mais il faut voir que le numérateur est un polynôme et le dénominateur un nombre qui est l'inverse du coefficient dominant.

Une réponse à la question Si on prend maintenant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(X)$ alors on a bien $P(a_i) = b_i$ pour tout i car tous les termes de la somme sont nuls sauf un, et par degré d'une somme, $\deg(P) \leqslant n$.

Une réponse plus précise On peut facilement montrer (et par une technique très utile) que le polynôme P que l'on vient d'exhiber est en fait unique.

Prenons Q tel que $\deg(Q) \leqslant n$ et $\forall i \in [\![0, n]\!] \; Q(a_i) = b_i$. Alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a $P(a_i) = Q(a_i)$ ou encore $(P - Q)(a_i) = 0$ (c'est la linéarité de l'évaluation). Ainsi tous les a_i sont racines du polynôme $P - Q$ qui est de degré n au maximum (degré d'une somme) et possède au moins n + 1 racines. On en déduit que $P - Q$ est le polynôme nul et donc $Q = P$ et on a bien prouvé l'unicité.

Pour aller plus loin On a vu en cours que l'existence et l'unicité de P peut aussi se déduire du fait que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est une application linéaire (facile) bijective (un peu moins facile. Prouver l'injectivité + égalité des dimensions). Le calcul du déterminant de la matrice de φ dans les bases canoniques est un exemple classique (mais pas si évident) de calcul d'un déterminant de taille n (exo 21 du TD 3).