Polynômes, complexes

Exercice 1
Montrer que $X^3 + pX + q$ avec $(p, q) \neq (0, 0)$ ne peut pas avoir de racines triple.

Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 2
Soit n un entier naturel impair et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$.

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E).
2. Déterminer le degré du polynôme P.
3. Notons ω une racine $n$ième de -1. Montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant (E) ?

Applications linéaires

Exercice 3
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4
Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Pour aller plus loin : Trouver un antécédent de X^2 et calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 5
Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$

Exercice 6
Soient $n, d \in \mathbb{N}$ avec $d \leqslant n$.

Soit Q un polynôme de degré d et f_Q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f_Q(P) = (P \times Q)^{(n)}$.

1. Montrer que f_Q est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que f_Q soit un automorphisme.
3. Dans le cas où $n = 2$ et $Q = X - 1$, trouver les éléments propres de f.
4. Même question dans le cas $n = 2$ et $Q = X^2 - 1$.
5. A quelle(s) condition(s) sur Q, f est-il diagonalisable.

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \ker(f + Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. On suppose maintenant que E est de dimension finie.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \ker(f - 2Id)$.

Réduction

Exercice 8
Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^4$ tels que $u \circ v = -v \circ u$ et $u \circ u = v \circ v = Id$.

1. Montrer que u et v sont de trace nulle et diagonalisables. Donner leurs valeurs propres et les dimensions des sous-espaces associés.
2. Montrer que si (e_1, e_2) est une base de $E_1(u)$ alors $(v(e_1), v(e_2))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Exercice 9
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto (3 - X)P'(X) - P(X) + X^2 P''(X)$ définie sur E.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique.
3. Est-il diagonalisable ?
4. f est-il un automorphisme ?

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel, f et g des endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, toute valeur propre de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.
3. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$.
   Montrer que f et g sont des endomorphismes de E. Montrer que 0 est valeur propre de $f \circ g$. 0 est-il valeur propre de $g \circ f$? Conclure.

Exercice 11
Soit $E = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\overline{z} |\ a, b \in \mathbb{C}\}$.
2. Calculer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$.
3. Donner une CNS pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

Exercice 12 (Oral 2019)
On définit les fonctions f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \mathrm{ch}(kx)$ et $g_k(x) = \mathrm{sh}(kx)$ pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On pose la famille

$$B_n = (f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n)$$

et $E_n = \mathrm{Vect}(B_n)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est une base de E_n dans le cas $n = 1$.
2. (Question ajoutée, ce peut être une indication de l'examinateur) Que vaut la dérivée de f_k ? De g_k ? Montrer par récurrence que $\mathcal{B}_n$ est une base de E_n.
3. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ on pose $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$ et on considère Φ la restriction de φ à E_n. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n.
4. Montrer que Φ est diagonalisable.

Produit scalaire, isométries

Exercice 13
On note r une rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe D, distincte de l'identité et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

Montrer que si $P = D^{\perp}$ alors $s \circ r = r \circ s$.

Etudier la réciproque.

Exercice 14
Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, telles que $\int\limits_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int\limits_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et constitue un produit scalaire.
3. On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions $L_0(x) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que L_n est polynomiale de degré n.
4. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

Exercice 15
Montrer que $\varphi : P \mapsto P + (X-1)P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver ses éléments propres et déterminer si φ est diagonalisable.

Exercice 16
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $a \in \mathbb{R}$ et u un vecteur unitaire de E, on pose $f_a : x \mapsto x + a\langle x, u\rangle u$.

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $A = \{f_a |\ a \in \mathbb{R}\}$ est stable pour la loi $\circ$ et commutatif.
3. Calculer f_a^p
4. Montrer que f_a est inversible ssi $a \neq -1$.
5. BONUS : donner l'interprétation géométrique du cas $a = -1$.

Exercice 17
On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac$, $s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. ($\star$) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 18
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles.

On considère $\varphi : (f, g) \mapsto \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définie sur $E \times E$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on pose $I(a, b, c) = \int\limits_{-1}^{1} (|x| - ax^2 - bx - c)^2\mathrm{d}t$. Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.
3. Calculer ce minimum.

Exercice 19
On pose $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int\limits_0^{1} (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\mathrm{d}t \end{array} \right.$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soient $V = \{f \in E|\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E|\ f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.
3. Soit $E_{a,b} = \{f \in E|\ f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$. Calculer $\inf\limits_{f \in E_{a,b}} \left(\int_0^1 (f^2 + f'^2)\right)$.

Exercice 20

1. Montrer que $\forall (u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4\ (ux + vy)^2 \leqslant (u^2 + v^2)(x^2 + y^2)$
2. Soit E un espace euclidien de dimension 2. On note S l'ensemble des vecteurs unitaires de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in S\ \|f(x)\| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
   (b) On pose alors $N(f) = \sup\limits_{x \in S} \|f(x)\|$. Déterminer $N(f)$ lorsque M est diagonale.
   (c) Que vaut $N(f)$ si f est une isométrie ?