Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif a_n tel que $f_n(a_n) = 1$.
2. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
3. Calculer a_0, a_1, a_2.
4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
5. Etudier la convergence ainsi que l'éventuelle limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2
Montrer que l'équation $\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ définit une application f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue. Est-elle dérivable ?

Exercice 3

1. Montrer que $\forall x > 0\, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{\arctan(x)} - \frac{2}{\pi}x$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{\arctan(nx)}\mathrm{d}x$

Exercice 4

1. Montrer que f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer le développement en série entière de f et calculer son rayon de convergence.

Exercice 5
Convergence et calcul de $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 6

1. Etudier la convergence des séries de terme général $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et $\frac{n!}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$.
2. Pour $n \geqslant 2$ on pose $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
   Calculer la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et celle de $\frac{V_{n+1}}{V_n}$. Que dire de la convergence des séries correspondantes ?

Exercice 7
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $\int\limits_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E\times E & \to \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto \int\limits_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t \end{cases}$ est définie et constitue un produit scalaire.
3. On définit sur $[0, +\infty[$ les fonctions $L_0(x) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$. Montrer que L_n est polynomiale de degré n.
4. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

Exercice 8
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f_\alpha(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+\beta}e^{-xt}\mathrm{d}t$. Montrer que f_α est définie sur $\mathbb{R}_+^+$ puis montrer qu'elle y est $\mathcal{C}^1$.

Donner ses variations et limites aux bornes. Est-elle $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 9
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{1+(na)^2}$.

1. Etudier la convergence. La somme, quand elle existe, est notée $h(a)$.
2. Etudier les variations de h, puis sa limite en $+\infty$.
3. Prouver que
$$\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{1+((k+1)a^2)} \leqslant \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{1+(ta)^2} \leqslant \frac{1}{1+(ka)^2}$$
4. Donner un équivalent de h en 0.

Exercice 10
On note D l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall p \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^p f(x) = 0$.

1. Donner le domaine de définition de $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}f(x)\mathrm{d}x$ pour $f \in D$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine et calculer F'.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine et calculer $F^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'aider d'une conjecture et procéder par récurrence).

Exercice 11 (Mines)
Exercice 1

1. Enoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 2

1. Etude de la conique d'équation $2x^2+3xy+y^2-5x-6y=0$.

Exercice 12

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$?
2. Montrer que la fonction $fx \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée.
3. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
4. Pour aller plus loin : donner une équation différentielle vérifiée par f puis déduire une expression de f, ou encore déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0 ou $+\infty$

Exercice 13

On définit la fonction f par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xy''+y'+xy=0$ grâce à une intégration par parties.
3. Appliquer la méthode de variation de la constante sur f.
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer toutes les colonnes X de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $X' = AX$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Quelle courbe est définie par X ?

Exercice 15 (Mines)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy'-y=\frac{x^2}{1+x^2}$.

Exercice 16

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin(xe^t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F_k est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F_k est solution de l'équation différentielle :

$$xy' - ky = -\sin(x)$$

Exercice 17

On pose $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : \begin{cases} E\times E & \to \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\mathrm{d}t \end{cases}$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $V = \{f \in E|\ f(0)=f(1)=0\}$ et $W = \{f\in E|\ f''=f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.
3. Soit $E_{a,b} = \{f\in E|\ f(0)=a \text{ et } f(1)=b\}$. Calculer $\inf_{f\in E_{a,b}}(\int_0^1 (f^2+f'^2))$.

Exercice 18

1. Montrer que $(E) : e^{-x}=x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_0.
2. En déduire que $f : (x,y) \longmapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ admet un unique extremum, dont on donnera la nature, atteint en un unique point dont on exprimera les coordonnées à l'aide de x_0.

Exercice 19

Soit $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x+y>0\}$ et soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} & \to U \\ (t,u) & \mapsto (t+u, t-u) \end{cases}$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $V=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ sur U et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $F = f\circ g$. Déterminer les dérivées partielles de f en fonction de celles de F.
3. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{2}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2}{2+x+y}f = (2+x+y)\cos(\frac{x+y}{2})$$

On suppose que f est une solution de (E) sur U, de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer une équation dont F est solution.

4. Déterminer les solutions de (E) sur U.