

Calculs liés : fiches 21 et 22.

## Limites indéterminées

### Exercice 1

1. Que dire de la limite de  $\frac{1}{x}$  quand  $x \rightarrow 0$ ?
2. Donner toutes les formes de limites indéterminées.

### Exercice 2

Dire si les limites suivantes sont indéterminées, les calculer et préciser le cas échéant la croissance comparée utilisée.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$                                  | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)+2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{-x} + \sin(\frac{1}{x})}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$                        |

### Exercice 3

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $n > 0$ fixé, $\cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ en 0.          | 3. $\sqrt[4]{x+x^6}$ en 0.                     |
| 2. $\frac{x^2+\ln x}{x^{\frac{2}{3}} + (\frac{2}{3})^x}$ en $+\infty$ . | 4. $\frac{xe^x}{x^2+x}$ en 0 et en $+\infty$ . |

### Exercice 4 (Un peu plus difficile)

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\ln(\cos(x))$ en 0                              | 3. $\ln(x^2 + x + 1) - 2 \ln(x)$ en $+\infty$ . |
| 2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0 et en $+\infty$ | 4. $\frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x+x^2)}$ en 0.    |

## Révisions sur les suites

### Exercice 5

Trouver une suite  $(u_n)$  divergente (par exemple qui tend vers  $+\infty$ ) et telle que  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers 0.

### Exercice 6

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, 1[$ .
2. Etudier la monotonie de  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  converge et ensuite calculer sa limite.

### Exercice 7 (\*)

Etudier la suite<sup>1</sup> :  $u_0 \in [1, 2]$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Comparaison des suites

### Exercice 8

Que signifie  $u_n = O_{+\infty}(1)$  pour la suite  $(u_n)$ ?

### Exercice 9

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites à valeurs réelles ou complexes (et qui se s'annulent pas).

1. Montrer que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$ .
2. Montrer que  $u_n = o_{+\infty}(v_n) \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$ .

### Exercice 10

Calculer les limites suivantes et traduire en terme de  $o_{+\infty}$  (2 traductions à chaque fois).

- |   |   |
|---|---|
| 1. $n^2 e^{-n} \underset{+\infty}{\rightarrow}$     | 3. $n^2 e^{-(\ln(n))^2} \underset{+\infty}{\rightarrow}$              |
| 2. $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ | 4. $\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n \ln(n)} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ |

### Exercice 11

Pour les suites  $(u_n)$  suivantes, vérifier qu'elles sont **strictement positives**, calculer la limites de  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  ainsi que celle de  $(u_n)$ .

- |                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| 1. $u_n = \frac{1}{n}$       | 3. $u_n = \binom{2n}{n}$ |
| 2. $u_n = \sin(\frac{1}{n})$ | 4. $u_n = \ln(n^2 + 1)$  |

### Exercice 12 (\*)

Nous allons étudier plus précisément la suite  $u_n = \binom{2n}{n}$ . Une manière classique est d'étudier

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

**Indication :** une méthode très classique pour obtenir une relation de récurrence sur des intégrales est d'effectuer une intégration par parties.

3. Calculer  $I_0$  et exprimer  $I_{2p}$  en fonction de  $I_0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . On attend une expression faisant intervenir  $u_p$ .

---

1. Rappel : on a  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on peut étudier des intervalles stables par  $f$  ainsi que ses points fixes...

4. Calculer  $I_1$  et exprimer  $I_{2p+1}$  en fonction de  $I_1$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .
5. Montrer, en utilisant les questions 1 et 2, que  $I_{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} I_{2p}$ .
6. Donner un équivalent de  $u_p$ .