

Calculs liés : fiches 21 et 22.

Limites indéterminées

Exercice 1

1. Que dire de la limite de $\frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0$?
2. Donner toutes les formes de limites indéterminées.

Exercice 2

Dire si les limites suivantes sont indéterminées, les calculer et préciser le cas échéant la croissance comparée utilisée.

- | | |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)+2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{-x} + \sin(\frac{1}{x})}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$ |

Exercice 3

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

- | | |
|---|--|
| 1. $n > 0$ fixé, $\cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ en 0. | 3. $\sqrt[4]{x+x^6}$ en 0. |
| 2. $\frac{x^2+\ln x}{x^{\frac{2}{3}} + (\frac{2}{3})^x}$ en $+\infty$. | 4. $\frac{xe^x}{x^2+x}$ en 0 et en $+\infty$. |

Exercice 4 (Un peu plus difficile)

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $\ln(\cos(x))$ en 0 | 3. $\ln(x^2 + x + 1) - 2 \ln(x)$ en $+\infty$. |
| 2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0 et en $+\infty$ | 4. $\frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x+x^2)}$ en 0. |

Révisions sur les suites

Exercice 5

Trouver une suite (u_n) divergente (par exemple qui tend vers $+\infty$) et telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

Exercice 6

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. Etudier la monotonie de (u_n) .
3. Montrer que (u_n) converge et ensuite calculer sa limite.

Exercice 7 (*)

Etudier la suite¹ : $u_0 \in [1, 2]$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comparaison des suites

Exercice 8

Que signifie $u_n = O_{+\infty}(1)$ pour la suite (u_n) ?

Exercice 9

Soient (u_n) et (v_n) des suites à valeurs réelles ou complexes (et qui se s'annulent pas).

1. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$.
2. Montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n) \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

Exercice 10

Calculer les limites suivantes et traduire en terme de $o_{+\infty}$ (2 traductions à chaque fois).

- | | |
|---|---|
| 1. $n^2 e^{-n} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ | 3. $n^2 e^{-(\ln(n))^2} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ |
| 2. $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ | 4. $\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n \ln(n)} \underset{+\infty}{\rightarrow}$ |

Exercice 11

Pour les suites (u_n) suivantes, vérifier qu'elles sont **strictement positives**, calculer la limites de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ ainsi que celle de (u_n) .

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1. $u_n = \frac{1}{n}$ | 3. $u_n = \binom{2n}{n}$ |
| 2. $u_n = \sin(\frac{1}{n})$ | 4. $u_n = \ln(n^2 + 1)$ |

Exercice 12 (*)

Nous allons étudier plus précisément la suite $u_n = \binom{2n}{n}$. Une manière classique est d'étudier

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

Indication : une méthode très classique pour obtenir une relation de récurrence sur des intégrales est d'effectuer une intégration par parties.

3. Calculer I_0 et exprimer I_{2p} en fonction de I_0 pour tout $p \in \mathbb{N}$. On attend une expression faisant intervenir u_p .

1. Rappel : on a $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut étudier des intervalles stables par f ainsi que ses points fixes...

4. Calculer I_1 et exprimer I_{2p+1} en fonction de I_1 pour tout $p \in \mathbb{N}$.
5. Montrer, en utilisant les questions 1 et 2, que $I_{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} I_{2p}$.
6. Donner un équivalent de u_p .