

Devoir maison 8

A rendre le au plus tard le 26/01/2017.

Exercice 1

1. On pose $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* et $f(0) = a \in \mathbb{R}$. Préciser la valeur de a pour que f soit continue en 0. Montrer que f est alors de classe C^1 sur \mathbb{R} .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch}(x)-1} - \frac{2}{x^2}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 et $f : t \mapsto \exp(e^t - 1)$ et en déduire $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
4. Montrer que pour $x > 0$, $\arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En déduire un développement à 3 termes de $\arctan(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Dans cet exercice on étudie les bases orthonormées de \mathbb{R}^2 . On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et on note \vec{u} et \vec{v} la première et la deuxième colonne de A respectivement.

1. Exprimer en fonction des coefficients de A les relations qui caractérisent le fait que la famille (\vec{u}, \vec{v}) est orthonormée.
2. Montrer d'une famille orthonormée de 2 vecteurs est une base du plan.
3. Montrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée directe ssi $\exists \theta \in]-\pi, \pi[A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.
4. Illustrer sur un schéma les vecteurs \vec{u}, \vec{v} trouvés à la question précédente et trouver une transformation simple qui transforme la base canonique (\vec{i}, \vec{j}) en la base (\vec{u}, \vec{v}) . Prouver le !
5. Trouver une forme similaire pour les bases orthonormées indirectes.
6. Soit $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et D_φ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Soit également $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées du symétrique orthogonal de X par rapport à la droite D_φ , noté $s_\varphi(X)$. Indication : penser à la projection orthogonale sur D_φ .
7. Donner une interprétation géométrique des bases orthonormées indirectes trouvées à la question 5.
8. Question subsidiaire : quel est l'interprétation de φ ? Et pourquoi peut-on le choisir dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?
9. En utilisant le cours sur les matrices, calculer pour un vecteur X et $\varphi, \psi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $s_\varphi(s_\psi(X))$. Interprétation ?