Table des matières

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

I.1.1 Définition
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par
$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$
On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.
Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.
2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.
Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.
3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

I.1.2 Exemple
Considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$. On note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la N-ième somme partielle, pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Alors
$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \\ &\dots \end{aligned}$$

I.1.3 Proposition
Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes et notons $z_n = x_n + iy_n$ la forme algébrique de chaque terme.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convergent. En cas de convergence on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

Preuve.
Simple traduction de la même propriété sur les suites, en considérant les suites de sommes partielles. ∎

I.1.4 Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les k premières valeurs de u_n pour un k fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge (ce qui revient à fixer à 0 les deux premiers termes de u_n).

I.1.5 Définition-Proposition
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
SI $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.
Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

I.1.6 Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une série diverge. La contraposée est : si $\sum u_n$ converge alors (u_n) converge et sa limite est 0.

Exemple : montrer que $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

I.1.7 Proposition
Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge. Dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire a priori sur $\sum (u_n + v_n)$ (cette dernière série peut être convergente ou divergente, suivant les cas).

Preuve.
- Trivial. Revenir aux sommes partielles.
- On fait un raisonnement par l'absurde. Si $\sum (u_n + v_n)$ converge, alors, d'après le point précédent, $\sum ((u_n + v_n) - u_n)$ converge. Contradiction.
- Par exemple $\sum (1 + (-1))$ converge. ∎

I.1.8 Attention

Le premier point est très pratique. Il s'agit de la linéarité de la somme de séries, mais il ne s'applique que lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux.

I.2 Séries de référence

I.2.1 Proposition (Séries géométriques)
Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n \geqslant 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve.
Reprendre le chapitre précédent + le résultat sur la divergence grossière. (q^n) converge ssi $|q| < 1$, ce qui prouve la divergence grossière si $|q| \geqslant 1$.

Pour la convergence dans le cas $|q| < 1$, on effectue le calcul classique, pour $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} q^n = \frac{1}{1-q} - q^{N+1}\frac{1}{1-q}$ avec $q^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|q| < 1$. ∎

I.2.2 Théorème
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Preuve.
On évacue directement le cas $\alpha \leqslant 0$: la série diverge grossièrement.

Pour les cas $\alpha > 0$, on utilise une méthode très utile.

Soit $N \geqslant 2$. On note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Remarquons que $S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)^\alpha} \geqslant 0$ et donc (S_N) est une suite réelle croissante.

Pour $n > 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

En sommant pour n allant de 2 à N on obtient
$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant S_N - 1 \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Distinguons maintenant 3 cas :

1. Si $\alpha = 1$, l'encadrement devient $\ln(N+1) - \ln(2) + 1 \leqslant S_N \leqslant \ln(N) + 1$. Par encadrement, $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. Si $\alpha \neq 1$, une primitive de $t \mapsto t^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}$. Dans ce cas on obtient l'encadrement devient
$$\frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right) + 1 \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 1\right) + 1$$
Pour étudier le comportement lorsque $N \to +\infty$, nous devons connaître le signe de $1 - \alpha$.
Traitons pour commencer le cas $1 - \alpha > 0$ c'est à dire $\alpha < 1$. Dans ce cas $S_N \to +\infty$ par encadrement et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

3. Si $\alpha > 1$, c'est à dire $1-\alpha < 0$, on obtient l'inégalité $S_N \leqslant \frac{1}{\alpha-1}(1-\frac{1}{N^{\alpha-1}})+1 \leqslant \frac{1}{\alpha-1}+1$. Alors la suite (S_N) est majorée en plus d'être croissante et converge donc.

En résumant tous les cas traités, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ (et donc diverge ssi $\alpha \leqslant 1$). ■

I.2.3 Série divergente

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente appelée série harmonique.

I.2.4 Série exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre n à exp entre 0 et x (exp est de classe $n+1$ sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

Ainsi $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |(x-t)^n e^t| \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x|^n e^t \mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^n (e^x-1)}{n!}$.

Par croissances comparées, $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

I.2.5 Une série télescopique

Exemple : Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

I.3 Séries à termes positifs

I.3.1 Cadre

On s'intéresse dans ce paragraphe aux séries $\sum u_n$ où (u_n) est une suite de réels **positifs**.

En posant, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$, on voit que $S_{n+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$. Ainsi la suite (S_N) des sommes partielles est une suites croissantes de réels.

I.3.2 Théorème
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left(\left\{ \sum\limits_{k=0}^{N} u_n |\ N \in \mathbb{N} \right\}\right)$.

I.3.3 Remarque

Ce théorème est fondamental pour la compréhension et l'intuition des séries à termes positifs convergentes. Le terme général ne doit pas "être trop grand", ou encore il doit tendre vers 0 (sinon : divergence grossière) "suffisamment vite".

I.3.4 Théorème (Comparaison des séries à termes positifs)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels positifs.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Preuve.
On note (S_N) et (T_N) les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement.

1. On fait la preuve dans le cas où le certain rang est le rang 0. Sinon, comme dit précédemment, on peut ignorer les premiers termes de chaque séries sans changer leurs natures.

   On a alors, par somme d'inégalités, $S_N \leqslant T_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Comme $\sum v_n$ converge, (T_N) est une suite majorée. Notons M un majorant. On a finalement $\forall N \in \mathbb{N}\ S_N \leqslant M$ et donc (S_N) est majorée donc converge.

2. On a cette fois, pour un certain $M \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant M v_n$ (car $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est majorée et on note M un majorant). Par linéarité, $\sum M v_n$ converge et on applique le point précédent.

3. Dans ce cas, on a (cf TD) $u_n = O(v_n)$ et on applique le point précédent.
4. Dans ce cas on a à la fois $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$... ■

I.3.5 Remarque

Ce théorème sera notre meilleur outil pour prouver la convergence ou la divergence des séries. L'idée fondamental pour son application : on trouve (v_n) qui permet de vérifier les hypothèses de 3. ou 4. en cherchant $\sum v_n$ parmi les séries de référence.

I.3.6 Exemple

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^n}$ converge.
2. $\sum \frac{n+3}{n^3-n}$ converge.

I.3.7 Convergence et croissances comparées

Rappelons qu'avec la notation $<<$ signifiant “est négligeable devant”, on avait $\frac{1}{n^n} << \frac{1}{n!} << q^n << \frac{1}{n^\alpha} << \frac{1}{\ln(n)^\beta}$ lorsque $\alpha, \beta > 0$ et $|q| < 1$. On peut résumer l'interaction avec le théorème précédent par

$$\underbrace{\frac{1}{n^n} << \frac{1}{n!} << q^n << \frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha > 1)}_{\text{la série converge}} << \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}(\alpha \leqslant 1) << \frac{1}{\ln(n)^\beta}}_{\text{la série diverge}}$$

I.3.8 Théorème

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels négatifs.

1. Si $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

I.3.9 Méthode

Après avoir vérifié que $u_n \geqslant 0$, on commence par calculer un équivalent simple si possible et on raisonne sur l'équivalent, par exemple en essayant de la comparer à un terme général de série de Riemann. On peut également calculer un développement asymptotique (plus rarement).

I.3.10 $n^\alpha u_n$

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs et $\alpha > 1$

1. Si on a $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum u_n$ converge.

   On a en effet $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ dans ce cas.
2. Si on a $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ converge car $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

On utilise généralement ce raisonnement après avoir calculé un équivalent, si possible. Voir le point précédent.

I.3.11 Exemple

1 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}$ converge. Question 5/2 : quelle est sa somme ? Quel chapitre utiliser ?

2 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(n+3)\ln(n)}{n^3+3n+2}$ converge.

I.3.12 Attention

L'hypothèse $(u_n), (v_n)$ positives est fondamentale. On peut avoir $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si elle n'est pas respectée.

Pour $n > 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ car $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$ (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).
2. Montrons que $\sum v_n$ converge. Posons, pour $N > 1$, $a_N = \sum\limits_{n=2}^{2N} v_n$ et $b_N = \sum\limits_{n=0}^{2N+1} v_n$.

   Alors
   - $b_N - a_N = v_{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$
   - $a_{N+1} - a_N = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \leqslant 0$ donc (a_N) est décroissante.
   - $b_{N+1} - b_N = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+3}} \geqslant 0$ donc (a_N) est croissante.

   Finalement, (a_N) et (b_N) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi les sommes partielles de $\sum v_n$ convergent vers ℓ (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font).
3. De plus, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_\infty(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Ainsi u_n est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente de donc $\sum u_n$ diverge.

I.3.13 Proposition
Si on a (u_n) et (v_n) positives :

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

I.3.14 Exemple

1. Montrer que la série $\sum \frac{n+2}{n^2-4}$ diverge.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

I.3.15 Pour montrer la divergence

On a trois principales méthodes :

— le terme général ne tend même pas vers 0 : divergence grossière.

— on calcule un équivalent qui est un terme général de série divergente.

— $nu_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$, ce qui donne $\frac{1}{n} = o_{+\infty}(u_n)$.

I.3.16 Théorème (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

Preuve.
On reprend le théorème correspondant dans le chapitre précédent et on applique le théorème de comparaison des séries à termes positifs à $\sum u_n$ et une série géométrique convergente (pour 1) ou divergente (pour 2).

Pour prouver le point 3, remarquer que les séries de Riemann sont toutes dans le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\to} 1$ (composition par une puissance FIXÉE). Pourtant, suivant les valeurs de α la série converge ou diverge. ∎

I.3.17 Utilisation

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de u_n fait apparaître des quantité $n!$ ou α^n en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

I.3.18 Exemple
Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge. On peut ainsi retrouver un résultat bien connu de croissances comparées sur les suites.

I.4 Application à l'étude de suites

I.4.1 Proposition
Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

I.4.2 Exemple
$u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n})$. Convergence ?

I.4.3 Exemple
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que (u_n) converge en étudiant la convergence de $\sum (u_n - u_{n-1})$

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

II.1.1 Définition
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Explication On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédents s'appliquent.

II.1.2 Théorème
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. **Si** $\sum u_n$ converge absolument **alors** $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve.

— Cas réel.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. C'est à dire que u_n^+ est u_n si $u_n \geqslant 0$ et 0 sinon. u_n^- est $|u_n|$ si $u_n \leqslant 0$ et 0 sinon.

Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a $u_n = u_n^+ - u_n^-, |u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

On pose pour $N \in N$, $S_N = \sum_0^N u_n$ et $S'_n = \sum_0^N |u_n|$.

On sait que $S'_N \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}^+$. Or $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$. Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par l donc les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Ainsi $\sum u_n$ converge par différence de série convergente.

— Cas complexe.

Cette fois on pose $u_n = x_n + iy_n$ et on sait que $\sum |x_n + iy_n|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leqslant |u_n|$ et $|y_n| \leqslant |u_n|$ donc les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire $\sum (x_n + iy_n)$ converge. ■

II.1.3 Méthode obligatoire

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

II.1.4 Exemple
Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

II.1.5 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

II.1.6 Attention

La réciproque est fausse. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, mais ne converge pas absolument.

Pour le voir, prenons $x \neq 1$ et notons que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En intégrant sur $[-1, 0]$ on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x$. Or $0 \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{1-x} \leqslant |x^{n+1}|$ sur l'intervalle $[-1, 0]$ et par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Finalement, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

II.2 Propriétés

II.2.1 Proposition
Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \geqslant 0$.

1. Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

II.2.2 Théorème
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Preuve.

— On considère pour commencer que (a_n) et (b_n) sont des suite réelles positives.

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n, B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n, C_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Posons de plus $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors $C_N = \sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{N}\left(a_k \sum\limits_{i=0}^{N-k} b_i\right)$. Remarquons de plus que $A_N B_N = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \sum\limits_{i=0}^{N} b_i$

Ainsi $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant AB$. La série $\sum c_n$, qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note C sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) + \sum_{k=N+1}^{2N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) \geqslant \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{N} b_i\right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement, $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant C_{2N}$ et par passage à la limite ($N \to +\infty$, les limites existent) on obtient bien $C = AB$.

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus, $c'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$, $A'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|, B'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n|, C'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |c_n|$ et A', B', C' les sommes de ces 3 séries (A', B' existent par hypothèse, C' d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent, $A'_N B'_N - C'_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.

De plus, $|C_N| \leqslant C'_N \leqslant C'$ par inégalité triangulaire et donc $\sum c_n$ converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore C sa somme (l'existence de C n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).

D'après les calculs du premier point, $A_N B_N - C_N$ est une somme $\sum\limits_{(i,j)\in E} a_i b_j$ où $E \subset [\![0, N]\!]^2$ (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans C_N), on a $|A_N B_N - C_N| \leqslant \sum\limits_{(i,j)\in E} |a_i b_j| = A'_N B'_N - C'_N$. Par encadrement, $A_N B_N - C_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ donc $C = AB$. ■

II.2.3 Exemple
Posons pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $f(a+b) = f(a)f(b)$.

II.3 Approximations et restes

II.3.1 Valeur approchée de la limite

Supposons que $\sum u_n$ converge vers S.

Alors pour $N \in \mathbb{N}$, $|S - S_N| = |R_N| = \left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right|$. Si on sait majorer les restes d'une série convergente, alors on connaît un minorant de la qualité de l'approximation ainsi que de la vitesse de convergence de la série.

II.3.2 Riemann

Soit $\alpha > 1$ un réel.

Montrons que $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

II.3.3 Séries géométriques

On connaît une expression explicite du reste.

Si on a maintenant une suite vérifiant $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$ pour un $k \in]0, 1[$, montrons que $|R_N| \leqslant \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$

Index