Devoir maison n°0

A rendre le 06/09

Exercice 1 (Algèbre linéaire et géométrie)
On note $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (on notera les éléments de $\mathbb{R}^3$ en colonne et non en ligne).

On pose également $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}), \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k})$ et $\vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$.

Pour $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^3$, on notera $\vec{u}_1.\vec{u}_2$ le produit scalaire de ces deux vecteurs.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de l'espace (ils sont deux à deux orthogonaux et de norme 1). Comment exprimer toutes les conditions à vérifier à partir de produit scalaire seulement ?

   Est-ce que $\mathcal{B}$ est une base directe ?

   Indication : on pourra commencer par noter nos vecteurs sous forme de colonnes.
2. On note $A = \mathrm{Mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Calculer A^tA. Qu'en déduire pour A ?
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Que valent $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{k})$?
   (b) Rappeler comment on calcule $f(\vec{u})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une colonne de taille 3.
   (c) Calculer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Trouver l'ensemble F des vecteurs fixes par f ie l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 |\ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$. On le décrira comme $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$ où $\vec{u}_1$ est une colonne dont la première coordonnée vaut 1.

   Expliquer pourquoi la condition sur la première coordonnée détermine $\vec{u}_1$ de manière unique.
4. On note $\mathcal{P}$ le plan $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Donner une équation de $\mathcal{P}$.
5. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f ie $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ ou encore pour tout $\vec{u} \in \mathcal{P}$, on a $f(\vec{u}) \in \mathcal{P}$.
6. Montrer que F est stable par f et que $F \oplus \mathcal{P} = \mathbb{R}^3$.
7. La question 5 montre que l'on peut définir $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ (comprendre : on a le droit le mettre cet ensemble d'arrivée). On dit que g est l'endomorphisme **induit** par f sur le sous-espace (stable) $\mathcal{P}$.
   (a) Donner une base orthonormée $(\vec{v}_1, \vec{w}_1)$ de $\mathcal{P}$ telle que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ soit une base directe de l'espace (question bonus : pourquoi est-ce forcément une base ?).
   (b) Donner la matrice de g dans la base $(\vec{v}_1, \vec{w}_1)$ et montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.
   (c) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}'_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ où $\vec{u}'_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ est le vecteur unitaire de même direction et sens que $\vec{u}_1$.

   Donner l'interprétation géométrique de f.

Exercice 2 (Analyse : fonction et série)
Dans cet exercice, toute mention explicite à la fonction exp est interdite. On se place dans le cadre (très improbable), où l'on connaît le cours théorique sur les fonctions continues, dérivables, mais sans avoir jamais entendu parler de exp ni ln.

Prenez ça comme un exercice de style, ou plutôt comme une volonté de définir exp sans admettre aucun résultat (sauf ceux explicitement rappelés dans l'énoncé).

Partie I : définition, propriété fondamentale

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction polynomiale $S_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{array} \right.$.

Exhiber les premières fonctions $(S_0, S_1, S_2, \dots)$ au brouillon et éventuellement deviner la limite de $S_n(x)$ quand $n \to +\infty$ (pour un x fixé).

1. On fixe ici $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et on souhaite étudier la convergence de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = S_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}$$

.

   (a) Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite.

   (b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général.

   (c) Soit $q \in [0,1[$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Pour quels $q \in \mathbb{C}$ ce calcul est-il encore valable ?

   (d) On pose $v_n = \frac{\alpha^n}{n!}$. Montrer que $v_n = o_{+\infty}(\frac{1}{2^n})$.

   (e) On pose $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant n_0\ 0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{2^k}$. Après avoir relu la définition d'une limite de suite, expliquer pourquoi cela est possible.

   Montrer que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n_0} v_k + 2$ puis prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ici, finalement, on a admis que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure. Théorème clairement hors de notre portée. Par contre, sa conséquence utilisée ici est du niveau pré-bac).

2. Les questions précédentes permettent de définir la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) \end{array} \right.$.

   Ainsi la valeur de $f(x)$ est la limite d'une suite dont le terme général dépend de x et quand on change x on change en fait toute la suite étudiée. On a prouvé que les suites considérées convergent toutes (ici $x \geqslant 0$).

   Nous allons maintenant prouver la plus importante des propriétés de f (question 2c). Dans cette question on identifie les fonctions polynomiales S_n à des polynômes (ces fonctions sont définies sur un ensemble infini...).

   (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $S_n(aX)S_n(bX) = S_n((a+b)X) + \sum\limits_{k=n+1}^{2n} c_k X^k$ où $c_k = \sum\limits_{i=k-n}^{n} \frac{a^i}{i!}\frac{b^{k-i}}{(k-i)}$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

   (b) En déduire que $|S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b)| \leqslant \frac{n\times\max((a+b)^{n+1},(a+b)^{2n})}{(n+1)!}$. Question subsidiaire : que vaut ce max en fonction de la valeur de $(a+b)$?

   Indication : on pourra commencer par montrer que $c_k \leqslant \frac{1}{k!}(a+b)^k$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

   (c) Montrer que $f(a+b) = f(a)f(b)$.

   (d) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a - b \geqslant 0$. Montrer que $f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}$

Partie II : extension à $\mathbb{R}$ et continuité

1. (a) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(1) > 2$.

   (b) Montrer que f est croissante en revenant à la définition. Qu'en déduire concernant son signe ?

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \leqslant S_n(x) - S_n(0) \leqslant xf(x)$. Pour quels x peut-on affirmer $x \leqslant S_n(x) - S_n(0) \leqslant xf(1)$?

   (d) En déduire que f est continue en 0. Attention à l'ordre des limites !

2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que f est continue en a. On pourra montrer que $f(a+h) \underset{h\to 0}{\to} f(a)$. Attention au fait que f n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.

3. On veut étendre la fonction f à $\mathbb{R}_-^*$. On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{f(-x)} \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Remarquons que $-x > 0$ lorsque $x < 0$ et donc $f(-x)$ existe et est strictement positif d'après la question 1b

   Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$. Attention au cas de 0. On ne peut a priori calculer que les limites à droites et à gauche, il faut s'assurer qu'elles sont égales à $g(0) = f(0)$.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$.

5. Montrer que 2c est encore vraie pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ie $g(a+b) = g(a)g(b)$ (3 cas à traiter au moins).

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g(an) = g(a)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ puis étudier la limite de g en $+\infty$ (si elle existe).

7. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a $g(x) \geqslant S_n(x)$ pour tout n et en déduire que pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, $x^N = o_{+\infty}(g(x))$.

Partie III : dérivabilité

On souhaite maintenant étudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$. Commençons par la dérivabilité en 0.

1. Première méthode.
   (a) Montrer que $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} 1 = f(0)$ directement. On pourra utiliser la partie II, question 1
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. En réécrivant le taux d'accroissement pour faire apparaître des images de nombres positifs par f, calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x}$.
   (c) Qu'avons nous prouvé en terme de dérivabilité ?
2. Deuxième méthode, en revenant à S_n.
   (a) Pour φ une fonction $\mathcal{C}^2([a,x],\mathbb{R})$ (pour $a,x \in \mathbb{R}$ avec $a < x$), rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et montrer que $|\varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)| \leqslant M\frac{|x-a|^2}{2!}$ où $M = \max\limits_{t\in[a,x]} |\varphi''(t)|$.

      L'existence de M est la conséquence d'un théorème de PTSI que l'on admet dans le programme (mais dont la démonstration est à notre portée). Vous citerez clairement ce théorème.
   (b) Montrer que $S_n : x \mapsto S_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer S_n' et S_n''. On pourra supposer que $n \geqslant 2$.
   (c) Soit $x > 0$. Montrer que $|S_n(x) - S_n(0) - xS_n'(0)| \leqslant S_{n-2}(x)\frac{x^2}{2}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. On peut conclure comme pour la première méthode.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$, conclure quand à la dérivabilité et montrer que $g' = g$.

   Avec la condition $g(0) = 1$, g est donc l'unique solution (sur $\mathbb{R}$) du problème de Cauchy $y' - y = 0$ et $y(0) = 1$. Remarquez cependant que la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution à un problème de Cauchy vu en PTSI suppose connue la fonction exponentielle.

Partie IV : réciproque

On souhaite maintenant étudier rapidement la réciproque de la fonction g.

1. Donner un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en y incluant les limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note $h : I \to \mathbb{R}$ la réciproque de g.
3. Justifier la continuité de h et tracer un tableau de variations complet incluant les limites de h.
4. Montrer que h est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Etablir que pour tout $a, b \in I$, $h(ab) = h(a) + h(b)$.

Indications

Exercice 1

1. On peut exprimer $\|\vec{u}\|^2$ à l'aide d'un produit scalaire.
2.
3. (a)
   (b) Vu que $\vec{u}$ est exprimé dans la base canonique, tout comme la matrice de f, il s'agit d'un simple produit matriciel.
   (c) Voir les méthodes de cours ! Penser à vérifier les résultats grâce au théorème du rang....
   (d) On doit résoudre un système et le nombre de paramètre à poser est indiqué par l'énoncé.
4. On cherche, pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à écrire $\vec{u} \in \mathcal{P} \iff .... \iff$ une équation sur x, y, z.
5. Traduire l'hypothèse $\vec{u} \in \mathcal{P}$, calculer $f(\vec{u})$ puis vérifier que $f(\vec{u}) \in \mathcal{P}$.
6. Même méthode pour la stabilité. Voir les méthodes de cours pour les espaces supplémentaires.
7. (a) On peut choisir $\overrightarrow{v_1}$ presque au hasard dans $\mathcal{P}$ et construire un $\overrightarrow{w_1}$ convenable.
   (b) Pour traiter cette question, et en cas d'échec à la question précédente, on pourra prendre $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Aucun calcul n'est nécessaire normalement.

Exercice 2

Partie I

1. (a) Attention à la notation α^0 qui est un raccourci pour noter 1 car on considère ici des polynômes et il s'agit donc du coefficient constant qui vaut $\frac{1}{0!}$.
   (b) L'hypothèse $\alpha \geqslant 0$ est importante.
   (c) C'est du cours. Très important qui plus est.
   (d) En cas d'utilisation du théorème de croissances comparées, citer le morceau précis qui nous intéresse ici.
   (e) Le 2 doit vous mettre sur la piste. Il s'agit de majorer 2 fois. On pourra séparer la somme définissant u_n en deux sommes : avant et après n_0.
2. (a) Il s'agit d'appliquer très précisément la formule de produit de polynômes. En particulier, dans cette formule et avec les notations classiques, les coefficients a_i, b_i sont parfois considérés implicitement comme nuls.
   (b) Évaluer l'égalité obtenue précédemment en 1, puis majorer la valeur absolue de la différence par inégalité triangulaire.
   (c) Le théorème d'encadrement (des gendarmes) est votre ami.
   (d) Facile, grâce à la question précédente.

Partie II

1. (a) On a déjà trouvé la valeur de $f(0)$ quelque part.
   (b) On ne peut pas dériver pour l'instant, d'où le recourt à la définition d'une fonction croissante. On prend $a, b \in [0, +\infty[$ tels que $a \leqslant b$ et on prouve que $f(a) \leqslant f(b)$. Pour ce faire, on revient à la définition de f comme limite de suite.
   (c) Écrire les termes de la somme $S_n(x) - S_n(0)$.
   (d) Que doit-on prouver ? Il s'agit ensuite d'établir l'encadrement $x \leqslant f(x) - f(0) \leqslant xf(1)$ valable pour des x à préciser et le théorème nécessaire à la conclusion est alors clair.
2. Cette fois, aucun besoin de raisonnement compliqué. On pourra plutôt utiliser les résultats finaux de la partie précédente.
3. La continuité en tout point $\neq 0$ ne pose pas vraiment de problème.
4.
5. On connaît bien les cas $a, b \geqslant 0$ car f vérifie la propriété voulue.
6. Une propriété vraie pour TOUT $n \geqslant 0$ et triviale pour $n = 0, 1$... La limite se traite en deux étapes : existence, puis seule valeur possible.
7. Un peu plus subtil. Pour la négligeabilité : revenir à la définition, majorer (un minorant égal à 0 convient) grâce à la première partie de la question pour un bon choix de n, puis calculer un équivalent de $S_n(x)$.

Partie III

1. (a) Ici on peut utiliser directement f car on travaille sur $\mathbb{R}^+$. Ce qui permet d'utiliser l'encadrement vu en partie II.
   (b) Ici $x < 0$ et on utilise la définition de g.
   (c)
2. (a) Taylor : à voir dans le cours. Pour la majoration, on pourra utiliser $\left|\int_a^b \dots\right| \leqslant \int_a^b |\dots|$ qui est valable lorsque les bornes vérifient $a \leqslant b$.
   (b) Attention au terme constant qui est "caché" dans la somme. C'est le terme pour $k = 0$ et il ne se comporte pas comme les autres dans la somme
   (c) Simple application des questions précédentes.
   (d) Encore une fois (cf partie II, question 1d), il faut absolument faire tendre n vers $+\infty$ avant toute chose pour retrouver f.
3. Aucun besoin de raisonnement compliqué, il suffit d'utiliser II.5

Partie IV

1. La dérivée est connue. On connaît déjà $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et la partie II permet de calculer la limite en $-\infty$ par changement de variable.
2. Théorème de sup.
3. Idem
4. Idem. Théorème plus délicat ici.
5. Question indépendante des autres dans cette partie. C'est la propriété fondamentale de f et g qui permet de prouver ceci.