Devoir maison 2

A rendre le au plus tard le 21/09/2021.

Exercice 1

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, que on appelle série de Bertrand. On note $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ pour tout $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Trouver un réel $\gamma > 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclure sur la nature de la série dans ce cas.
2. On suppose $\alpha < 1$. Trouver un réel $\gamma \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\gamma} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$. Conclure.
3. On suppose maintenant $\alpha = 1$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ suivant la valeur de β en utilisant une comparaison série-intégrale.
4. Résumer, dans un tableau, la nature des séries de Bertrand suivant les valeurs de α et β

Indications :

1. Après un petit calcul à faire, on cherche γ tel que $n^\gamma u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Quelles conditions doit vérifier γ ?
2. Idem
3. Nous avons un exemple complet d'application : la preuve du théorème donnant la nature des séries de Riemann. Deux cas pour calculer une primitive : $\beta = 1$ ou $\beta \neq 1$. On pensera au fait que si $u : t \mapsto \ln(t)$ alors $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et donc la fonction à intégrer est de la forme ....
4. On peut, par exemple, indiquer des valeurs de α en lignes et celles de β en colonnes.